

# **IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROL NO LINEAL ADAPTATIVO EN UN PÉNDULO DE RUEDA DE REACCIÓN.**

**CESAR AUGUSTO GARCÍA RAMÍREZ**

**JHON ALEXÁNDER NIETO TREJOS**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
FACULTAD DE INGENIERÍAS  
PROGRAMA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
PEREIRA  
2015**

**IMPLEMENTACIÓN DEL CONTROL NO LINEAL ADAPTATIVO  
EN UN PÉNDULO DE RUEDA DE REACCIÓN.**

**CESAR AUGUSTO GARCÍA RAMÍREZ**

**JHON ALEXÁNDER NIETO TREJOS**

**PROYECTO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE  
INGENIERO ELECTRICISTA**

**DIRECTOR  
PhD. EDUARDO GIRALDO SUAREZ.**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA  
FACULTAD DE INGENIERÍAS  
PROGRAMA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA  
PEREIRA  
2015**

Nota de aceptación

---

---

---

---

---

---

Director del Programa

---

Director del Proyecto

---

Jurado

## ***DEDICATORIA***

- A Dios quien es nuestro guía y concejero en todos los momentos de nuestra vida, y quien siempre estará en nuestro caminar.
- A mi padre Julio Cesar García y mi madre Mercedes Ramírez, por su apoyo incondicional en todo momento, por darnos todas las fuerzas para cumplir cada día nuestras metas y proyectos de vida, por los esfuerzos que hicieron para formarme como persona con los valores primordiales y el compromiso a los deberes, que sin ellos no habría podido conseguir mis objetivos, quienes serán mis más grandes amores y mi mejor ejemplo de vida.
- A mis hermanos Christian Julián y Sebastián David, por todo los conocimientos brindados durante mi formación, que sin importar los obstáculos siempre serán mis apoyos incondicionales y a Angie Nathalia Castro por el acompañamiento y apoyo con el inicio de una etapa de la vida.

***Cesar A. García R.***

- A Dios, por darme la oportunidad de vivir y por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudio.
- Mi mamá Fabiola Trejos, quien es mi más grande apoyo y mi motivo de superación en todo momento, mi compañía y razón de vida, por darme los mejores consejos y el mejor ejemplo para salir adelante, por ser la mujer y la mama más especial y maravillosa de todas y por ayudarme a cumplir cada uno de mis sueños y metas antes, ahora y siempre, y por todo tu amor, todo esto te lo debo a ti.
- Mi hermano Daniel Nieto, por darme tu apoyo incondicional, por tu acompañamiento a lo largo de mis estudios, por ser esa persona que siempre va a estar pendiente de mí, y siempre va a tener esa palabra o consejo para compartirme y ayudarme en mi caminar, mis hermanos Andrés Nieto y Juan Carlos Nieto, por su compañía y conocimientos en el transcurso de mi vida.

***Jhon A. Nieto T.***

## ***AGRADECIMIENTO***

- Al ingeniero y director del proyecto Eduardo Giraldo, a los ingenieros Danna Albarracín, Juan Guillermo Valenzuela, Oscar Danilo Montoya, Rodrigo Franco y Cristian Daniel Molina por su conocimiento, acompañamiento y ayuda en la realización y culminación de este proyecto.
- A Yhonathan Yesid Orrego, Daniel Fernando Patiño y Diego Alejandro Puentes, por brindarnos las herramientas necesarias durante la ejecución del proyecto y a todos los compañeros del Programa de Ingeniería Eléctrica de la UTP que en su momento nos dieron el apoyo necesario para la culminación del mismo.

***Autores***



# INTRODUCCIÓN

El control es una de las disciplinas que en la actualidad tiene grandes ventajas y beneficios en muchos ámbitos de automatización, en las que permite optimizar los tiempos en la ejecución de una tarea específica en procesos industriales, y generando grandes aportes ante la creciente complejidad en los sistemas, con nuevas técnicas de control que permita supervisar procesos que involucren muchas variables.

El aumento en el interés de la aplicación correcta de una técnica de control no lineal, el cual pueda solucionar el problema que se plantee, y que se ve reflejado a la hora de querer introducirla en un péndulo invertido, puesto que su principal problema o dificultad es lograr llevar al péndulo desde su posición inicial colgante hasta su posición invertida, y mantenerlo en ese punto final completamente estable, por tal motivo, no solo se debe elegir de manera adecuada un método no lineal para esta tarea, sino el lograr que este se pueda convertir a una técnica de control adaptativa.

Muchas técnicas de control han sido propuestas teniendo en cuenta el modelo matemático del sistema, y a pesar de dar resultados satisfactorios, las incertidumbres causadas por el modelo, dificultan el diseño de un modelo determinístico, debido a esto, el control por planos deslizantes ha tomado gran fuerza en los últimos años, puesto que es un control de estructura variable, con realimentación no lineal y permite cambiar su estructura para poder conseguir los resultados deseados; además, es mucho menos sensible a perturbaciones y es ideal para usarse en planos sub-actuados.

Se plantea un método de control adaptativo no lineal, que sea capaz de variar los parámetros del controlador a resultados óptimos, logrando adaptarse a cualquier tipo de cambio que se realice a la planta, buscando estabilizar adecuadamente la posición invertida del péndulo en la posición final dejándola fija (estado estable) para su estudio y análisis posterior.

## JUSTIFICACIÓN

Uno de los inconvenientes que presenta el péndulo invertido en la actualidad, y que está asociado a problemas de control reales, es poder lograr una estabilidad en su punto de equilibrio inestable, en la controlabilidad y observabilidad, que debido a esto ha servido como estudio de investigación.

El péndulo invertido se ha usado en muchos casos de control, pero muchos de esos estudios se han hecho teniendo en cuenta el modelo matemático, y en algunos casos no es necesario dicho modelo, para las cuales se adoptan técnicas de control no lineales adaptativas para así poder tener bien claro sus parámetros y sus respuestas para aplicarlas e implementarlas al controlador.

Basado en el estudio del péndulo invertido, y a las diversas técnicas de control no lineal que se pueden aplicar para el mismo, se puede ver que aun los sistemas inestables pueden ser controlados adecuadamente, se puede dar solución a muchas investigaciones planteadas bien sea por la industria, planta o cualquier sistema físico, con características lineales o no lineales.



# OBJETIVOS

## Objetivo general

- Implementar el péndulo de rueda de reacción sobre un modelo a escala, por medio de técnicas de control no lineal adaptativas.

## Objetivos específicos

- Analizar los diferentes escenarios para el uso adecuado de las técnicas de control no lineal.
- Estudiar nuevos métodos de control no lineal que se puedan convertir en una técnica de control adaptativa.
- Determinar el momento de inercia para el control del péndulo en su posición invertida.
- Aplicar la técnica de planos deslizantes, para sistemas mecánicos sub-actuados y en controles adaptativos.

# Tabla de contenido

<b>INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>7</b>
<b>JUSTIFICACIÓN .....</b>	<b>8</b>
<b>OBJETIVOS.....</b>	<b>9</b>
Objetivo general .....	9
Objetivos específicos .....	9
<b>1. Péndulo invertido con rueda de reacción .....</b>	<b>12</b>
1.1. Introducción.....	12
1.2. MODELO MATEMÁTICO DEL SISTEMA RWPI.....	13
1.3. MODELO DINÁMICO DEL MOTOR DC.....	16
1.4. SEÑAL DE CONTROL.....	17
1.5. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS.....	17
<b>2. Control adaptativo por planos deslizantes.....</b>	<b>20</b>
2.1. Linealización por realimentación.....	20
2.2. Método de espacio de estados.....	21
2.3. Control por planos deslizantes en tiempo continuo .....	22
2.3.1. Condición de deslizamiento .....	22
2.5. Control adaptativo .....	29
2.5.1. Control adaptativo directo e indirecto .....	29
2.5.2. Control adaptativo por modelo de referencia (MRAS) .....	30
2.6. Método de Lyapunov .....	31
<b>3. Implementación, diseño y simulación del sistema de control del péndulo invertido con rueda de reacción .....</b>	<b>34</b>
3.1. Diseño del sistema RWPI.....	34
3.2. Regulación de la energía del sistema .....	35
3.3. Diseño del control por realimentación de variables de estado .....	37
3.4. Diseño del control por planos deslizantes para el sistema RWPI .....	38
3.5. Análisis de resultados.....	44
3.5.1. Comportamiento del sistema controlado .....	44
3.5.2. Comportamiento del sistema con perturbaciones .....	48
3.5.3. Comparación de resultados .....	52
<b>4. Conclusiones y trabajos futuros.....</b>	<b>56</b>

<b>5. BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>58</b>
<b>6. ANEXO .....</b>	<b>60</b>
<b>6.1. Código del control local por planos deslizantes adaptativo.....</b>	<b>60</b>

# Capítulo 1

## 1. Péndulo invertido con rueda de reacción

### 1.1. Introducción

El péndulo invertido se ha usado en muchos casos de control, pero muchos de esos estudios se han hecho teniendo en cuenta el modelo matemático, y en algunos casos no es necesario dicho modelo, para las cuales se adoptan técnicas de control no lineales adaptativas para así poder tener bien claro sus parámetros y sus respuestas para aplicarlas e implementarlas al controlador.

Basado en el estudio del péndulo invertido, y a las diversas técnicas de control no lineal que se pueden aplicar para el mismo, se puede ver que aun los sistemas inestables pueden ser controlados adecuadamente, se puede dar solución a muchas investigaciones planteadas bien sea por la industria, planta o cualquier sistema físico, siendo un sistema lineal o no lineal.

El péndulo con rueda de reacción fue introducido por Mark W. Spong en 1995 y mostrado en la Figura 1.1, describe el sistema mecánico como un péndulo simple, sujeto a una rueda giratoria en uno de sus extremos. Esta rueda es simétrica y es accionada por el eje de un Motor DC de imán permanente de 24 V, que por su composición está asociada a un torque de acoplamiento mecánico entre la rueda y el péndulo, permitiendo controlar así el movimiento del sistema. Este sistema es subactuado y no lineal, que lo convierten en un sistema atractivo y útil para la investigación. [6]



**Figura 1.1.** Sistema real del Péndulo con Rueda de Reacción (tomado de [6])

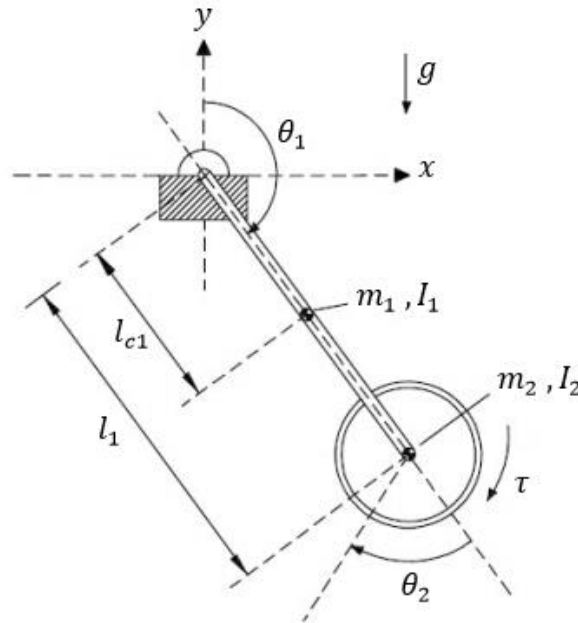
Las investigaciones relacionadas con los sistemas subactuados, ha generado gran interés en el área de ingeniería de control, por ofrecer un ahorro de energía y esfuerzos de control, considerando que los sistemas subactuados realicen las mismas tareas que un sistema mecánico completamente actuado, y conservando un sistema con menor número de

actuadores que de grados de libertad, haciendo frente a los problemas del control. Con esto, se genera un gran campo activo de investigación por su amplia gama de aplicaciones en robótica, vehículos marinos y aeroespaciales. [4][6].

## 1.2. MODELO MATEMÁTICO DEL SISTEMA RWPI

El Péndulo Invertido con Rueda de Reacción (RWPI por sus siglas en ingles) es un mecanismo en donde se debe controlar simultáneamente la posición del péndulo y la velocidad de la rueda, creando una aceleración en un corto tiempo para llegar a la posición invertida con una velocidad lenta; y así obtener un control real del sistema. Por esta razón, es natural analizar y diseñar un controlador por realimentación de estado para la estabilización del sistema utilizando la técnica de control por modo deslizante para el diseño robusto considerado.

Para la obtención de las ecuaciones de movimiento del sistema mecánico, se hace necesario el uso de las Ecuaciones de *Euler Lagrange* como herramienta matemática para el desarrollo del modelo. Con la función de *Euler Lagrange* se tiene un conjunto de coordenadas generalizadas  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$  que representa los  $n$ -grados de libertad del sistema. Para este diseño, se cuentan con un sistema de dos grados de libertad, correspondientes al ángulo  $\theta_1$  de la barra medido de la posición vertical y el ángulo  $\theta_2$  de la rueda respecto a la referencia de la barra, como se observa en la figura 1.2.



**Figura 1.2.** Péndulo Invertido con Rueda de Reacción (RWPI) (tomado de [11])

Donde

$m_1$  = Masa del péndulo (kg)

$m_2$  = Masa de la rueda (kg)

$\theta_1$  = Ángulo del péndulo (rad)

$\theta_2 = \text{Ángulo de la rueda (rad)}$   
 $\tau = \text{Señal de control (N * m)}$   
 $l_{c1} = \text{Distancia del centro de masas (m)}$   
 $l_1 = \text{Longitud del péndulo (m)}$   
 $I_1 = \text{Momento de Inercia del péndulo (kgm}^2\text{)}$   
 $I_2 = \text{Momento de Inercia de l rueda (kgm}^2\text{)}$   
 $g = \text{Aceleración de la gravedad (m/s}^2\text{)}$

La representación de las energías se ve presente en la barra pendular y la rueda, en función de las coordenadas generalizadas y de las propiedades físicas del sistema, se calcula la Energía Cinética ( $E_K$ ) y la Energía Potencial ( $E_U$ ) como se observa en (1.1) y (1.2).

$$E_K = \frac{1}{2} \int v^2 dm \quad (1.1)$$

$$E_U = \int F dr \quad (1.2)$$

Como el péndulo es un cuerpo cuya masa está distribuida a lo largo de una varilla, donde  $E_{Kp}$  y  $E_{Kr}$  representa la energía cinética de la rueda y el péndulo, se obtiene las siguientes expresiones:

$$E_{Kp} = \frac{1}{2} m_1 l_{c1}^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (1.3)$$

$$E_{Kr} = \frac{1}{2} m_1 l_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (1.4)$$

Entonces la Energía Cinética queda expresada según (1.5) y (1.6):

$$E_K = E_{Kp} + E_{Kr} \quad (1.5)$$

$$E_K = \frac{1}{2} (m_1 l_{c1}^2 + m_1 l_2^2 + I_1) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (1.6)$$

Para el cálculo de la Energía Potencial (donde  $E_{Ur}$  y  $E_{Up}$  representa la energía de la rueda y el péndulo), dada por el producto de la fuerza aplicada sobre el péndulo y la distancia, y asumiendo que es obtenida por el efecto de la gravedad, y sin tener en cuenta la elasticidad de los elementos; se puede obtener las siguientes expresiones:

$$E_{Up} = g m_1 l_{c1} (1 - \cos \theta_1) \quad (1.7)$$

$$E_{Ur} = g m_2 l_1 (1 - \cos \theta_1) \quad (1.8)$$

Por lo tanto, la Energía Potencial queda definida así:

$$E_U = E_{Up} + E_{Ur} \quad (1.9)$$

$$E_U = g m l (1 - \cos \theta_1) \quad (1.10)$$

Donde

$$ml = m_1 l_{c1} + m_2 l_1$$

Para la obtener las expresiones de movimiento del sistema, la función de *Euler Lagrange*, será la diferencia de la Energía Cinética y Potencial, la cual queda expresada con (1.11) y (1.12):

$$L = E_K - E_U \quad (1.11)$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 l_{c1}^2 + m_1 l_2^2 + I_1)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - gml(1 - \cos \theta_1) \quad (1.12)$$

Las ecuaciones diferenciales según *Euler Lagrange*, se obtienen a partir de la expresión (1.13):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_n}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_n} = \tau_n \quad (1.13)$$

Sustituyendo  $L$  de la expresión (1.12) con sus respectivas derivadas parciales requeridas, en las ecuaciones de movimiento de la expresión (1.13), obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) &= (m_1 l_{c1}^2 + m_1 l_2^2 + I_1 + I_2)\ddot{\theta}_1 + I_2 \ddot{\theta}_2 & \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -gml \sin \theta_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) &= I_2 \ddot{\theta}_1 + I_2 \ddot{\theta}_2 & \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= 0 \end{aligned}$$

Luego se agrupa convenientemente los términos resultantes expresando la ecuación (1.13) de forma matricial según (1.14):

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -gml \sin \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Donde

$$\begin{aligned} m_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + m_1 l_2^2 + I_1 + I_2 \\ m_{22} &= m_{12} = m_{21} = I_2 \end{aligned}$$

Finalmente al realizar las combinaciones necesarias de las ecuaciones de movimiento de *Euler Langrange* y utilizando los resultados de la sustitución expresados en (1.14), se llega a las expresiones que representan el modelo dinámico del sistema en términos de  $\ddot{\theta}_1$  y  $\ddot{\theta}_2$  en las ecuaciones (1.15) y (1.16). Donde  $DM = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{11} > 0$ . [3][12].

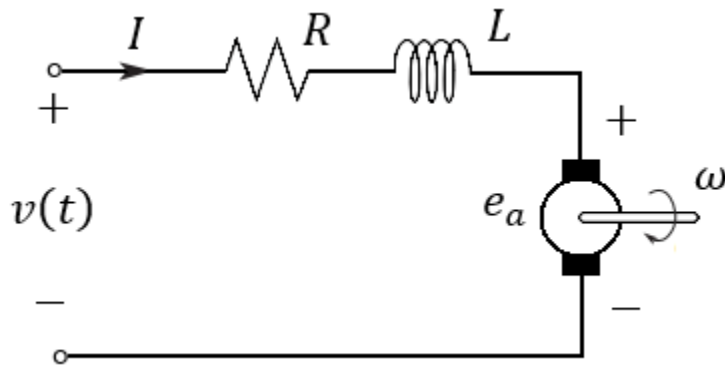
$$\ddot{\theta}_1 = \frac{m_{22}}{DM} gml \sin \theta_1 - \frac{m_{12}}{DM} \tau \quad (1.15)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{m_{21}}{DM} gml \sin \theta_1 + \frac{m_{11}}{DM} \tau \quad (1.16)$$

### 1.3. MODELO DINÁMICO DEL MOTOR DC

Considerando un motor de corriente continua el cual es un elemento transformador de energía eléctrica en energía mecánica rotacional, logrado al aplicar una fuerza electromotriz en los terminales del motor, en el cual genera un flujo de corriente que produce un campo magnético y relacionado con el campo producido por los imanes permanentes del motor, se produce un movimiento rotacional en el rotor de la máquina [10]. En la figura 1.3, se observa el modelo circuital para el motor DC de imanes permanentes, con la expresión matemática que represente al circuito eléctrico del motor en términos de las variables de físicas de corriente, voltaje y velocidad de giro en el eje del motor, expresado en (1.17). [8].

$$v(t) = RI + L \frac{dI}{dt} + e_a \quad (1.17)$$



**Figura 1.3.** Representación Circuital del Motor Eléctrico DC

Donde  $R$  es la resistencia de armadura,  $L$  es la inductancia de armadura y  $e_a$  el voltaje inducido, defino como  $e_a = K_b * \omega$ , siendo  $K_b$  la constante de la fuerza contraelectromotriz del motor y  $\omega$  la velocidad angular.

Para obtener la velocidad angular máxima del motor, se produce cuando el voltaje suministrado al motor es igual al voltaje inducido en la armadura, despreciando el efecto inductivo (por tener un valor pequeño  $L \approx 0$ ) y considerando que no hay perdidas en la resistencia de armadura ( $R \approx 0$ ), se toma que la expresión (1.17) se obtiene como resultado de (1.18):

$$\omega_{m\acute{a}x} = \frac{V_{m\acute{a}x}}{K_\tau} = 888,89 \text{ rad/s} \quad (1.18)$$

Con  $V_{m\acute{a}x} = 24V$ ,  $K_\tau = 2,74e^{-2} Nm/s$  y  $\omega = \dot{\theta}_2$

Al obtener este resultado de la expresión (1.18), se tiene el parámetro de desigualada en que el torque se puede generar:

$$-\frac{V_{m\acute{a}x}}{K_\tau} \leq \dot{\theta}_2 \leq \frac{V_{m\acute{a}x}}{K_\tau} \quad (1.19)$$

Despreciando la fuerza de fricción y la dinámica eléctrica del motor, el torque puede obtenerse en función de la corriente por la constante de la fuerza contraelectromotriz o de



par del motor, ya que el motor a utilizar satisface la ecuación de acoplo electromecánico, expresada en (1.19).

$$\tau = K_\tau I \quad (1.20)$$

## 1.4. SEÑAL DE CONTROL

El voltaje aplicado al motor DC que actúa en la rueda, es una señal con valor verdadero que se puede manipular directamente, pero aplicado al torque, genera una variable que resultado del efecto de dicho voltaje aplicado; para modificar la variable de control, es necesario una señal de control que intervenga sobre el torque que está expresado en (1.19); para considerar la señal de control, a partir de la expresión matemática del modelo circuital del motor DC de la ecuación (1.17), es necesario suponer que el torque es la señal de control, si se desprecia el efecto inductivo ( $L \approx 0$ ) y supone la constante  $K_b = 0$  en [8]. Con base en lo anterior, obtenemos la señal de control ( $u = v$ ) expresado en la ecuación (1.20):

$$u = \frac{\tau}{K_u} \quad (1.21)$$

Donde  $K_u$  es la constante asociada a la variable de control  $u$  y  $\tau$  el torque generado por el motor, siendo  $K_u = (\tau/u) = (K_\tau I/u) = (K_\tau/R)$ , con  $R = (u/I)$ .

Por lo tanto para el modelo del sistema se define:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{m_{22}}{DM} gml & K_2 &= \frac{m_{12}}{DM} K_u \\ K_3 &= \frac{m_{21}}{DM} gml & K_4 &= \frac{m_{11}}{DM} K_u \end{aligned}$$

Para el modelo del sistema del RWPI mostrado en las expresiones (1.15) y (1.16), como se muestra en (1.22) y (1.23):

$$\ddot{\theta}_1 = K_1 \sin \theta_1 - K_2 u \quad (1.22)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -K_3 \sin \theta_1 + K_4 u \quad (1.23)$$

## 1.5. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS

En esta sección se plantearán todos los parámetros a utilizar para el modelo, identificación y diseño del Péndulo Invertido con Rueda de Reacción, para ser plasmados en las variables asignadas y obtener valores escalares del modelo del sistema. En la tabla 1.1., se presenta los parámetros del sistema de diseño del péndulo, seguido de los valores de las variables del Motor DC RS-385PH-15155 consignados en la tabla 1.2.

**Tabla 1.1.** Parámetros del sistema RWPI

PARÁMETROS DEL SISTEMA RWPI		
PARÁMETRO	VALOR	UNIDADES
$l_1$	0,124	$m$
$l_{c1}$	0,063	$m$
$m_1$	0,020	$kg$
$m_2$	0,300	$kg$
$I_1$	$47e^{-6}$	$kgm^2$
$I_2$	$32e^{-6}$	$kgm^2$
$g$	9,81	$m/s^2$

**Tabla 1.2.** Parámetros del Motor DC

PARÁMETROS DEL MOTOR		
PARÁMETRO	VALOR	UNIDADES
$K_\tau$	$2,74e^{-2}$	$Nm/A$
$\tau$	8,30	$mN * m$
$\omega$	6800	$rpm$
$I_{m\acute{a}x}$	0,11	$A$
$V_{m\acute{a}x}$	24	$V$

Para la identificación de la constante de la señal de control  $K_u$  y realizando los cálculos pertinentes del modelo del sistema, con los datos consignados en la tabla 1.2., se obtiene (1.24):

$$K_u = \frac{K_\tau I_{m\acute{a}x}}{V_{m\acute{a}x}} = 81e^{-6} Nm/V \quad (1.24)$$

En la tabla 1.3, están consignados todos los valores de las constates del sistema, quien están asociados a cada una de las variables para la obtención de los resultados de forma segura y rápida.

**Tabla 1.3.** Constantes del sistema RWPI

CONSTANTES DEL SISTEMA	
CONSTANTES	VALOR
$a$	$\pi/2$
$c_1$	9
$\lambda$	10
$K_c$	100
$K_d$	$39,456e^{-3}$



# Capítulo 2

## 2. Control adaptativo por planos deslizantes

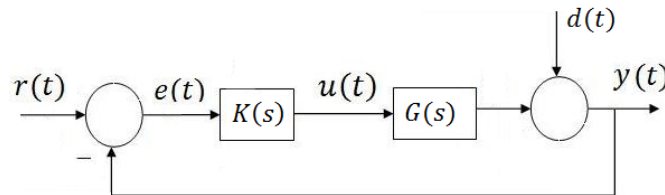
### 2.1. Linealización por realimentación

En la configuración estándar de un sistema de control, la planta y el control forman un bucle cerrado en el que cada componente ejerce una influencia sobre el otro. La entrada a la planta  $u$  depende a través del controlador de la variable controlada  $y$ , la cual a su vez depende de la entrada por la dinámica de la planta. Este fenómeno se llama realimentación.

Los sistemas realimentados tienen la misión de encontrar un controlador para conseguir mantener la estabilidad, mejorar la robustez, atenuar las perturbaciones, asegurar la regulación asintótica, entre otras. Un sistema realimentado consta de un proceso dado con unas propiedades fijas y de un controlador que puede elegirse libremente.

Los sistemas realimentados muestran varias propiedades importantes porque el comportamiento del sistema global está dado por las propiedades de la interacción de cada una de las partes. La realimentación hace posible controlar sistemas inestables, mejorar la robustez ante variaciones del comportamiento de algunas partes del sistema, o atenuar las perturbaciones externas no medibles.

El principal beneficio de la realimentación no puede deducirse sin la consideración de las incertidumbres en el comportamiento de la planta. Hay dos razones por las que la salida de la planta  $y$ , para una entrada dada  $u$ , produce una trayectoria que no está completamente determinada previamente. Primero la dinámica de la planta no se conoce completamente, por lo que el modelo de la planta solo puede considerarse como una aproximación más que como una descripción exacta. Segundo, perturbaciones desconocidas pueden influir en el comportamiento del sistema. En este caso, la salida  $y$  no es sólo la respuesta a la señal de control  $u$ , sino a la perturbación  $d$ , que es generalmente indeterminada en el sentido que puede ser cosa dentro de un conjunto de posibles señales de perturbación. [2]



**Figura 2.1.** Control en bucle cerrado

Como la señal de control  $u$  es calculada por el controlador dependiendo del valor actual de  $y$ , hay que tener en cuenta el efecto de las señales de control anteriores y de las perturbaciones.

## 2.2. Método de espacio de estados

Las variables de estado en un sistema dinámico son las variables que constituyen el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado del sistema. Se requiere al menos  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  para describir completamente el comportamiento dinámico del sistema de orden  $n$ , estas son las  $n$  variables de estado.

Conocidas estas variables  $n$  en el instante de tiempo inicial y las evoluciones de las entradas para tiempos  $t > t_0$ , el estado futuro del sistema queda completamente determinado. Es importante aclarar que las variables de estado pueden ser medibles o no, que representen magnitudes físicas o solo matemáticas.

El espacio de  $n$ -dimensiones cuyos ejes coordenados consisten en el eje  $x_1$ , el eje  $x_2$ , ..., el eje  $x_n$ , se denomina espacio de estados. Cualquier estado se puede representar por un punto en el espacio de estados.

Las ecuaciones en el espacio de estados para la representación del modelo dinámico de sistemas hacen el uso de tres tipos de variables: las variables de entradas, las variables de salida y las variables de estado.

Las ventajas del uso en representación en espacio de estados es que este puede en su modelado representar sistemas tanto continuos como discretos, lineales o no lineales, entre muchos otros, con el fin de poder determinar y obtener las soluciones que sean necesarias.

[1]

Se puede expresar para sistemas lineales a coeficientes constantes e invariantes con el tiempo, con lo siguiente (2.1):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1m}u_m \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2m}u_m \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{nm}u_m\end{aligned}\quad (2.1)$$

En forma de notación matricial se obtiene (2.2):

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.2)$$

Siendo  $\dot{x}$  el vector derivada en el tiempo de las variables de estado de dimensión  $n$ , donde:

$u$ = El vector de entrada (también denominado de control) de dimensión  $m$ .

$A$ = La matriz de estado de dimensión  $n \times m$

$B$  = La matriz de entrada de dimensión  $m \times n$

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \cdots + d_{1m}u_m \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \cdots + d_{2m}u_m \\ \vdots &= \dots\dots\dots + \dots\dots\dots \\ y_n &= c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \cdots + c_{rn}x_n + d_{r1}u_1 + d_{r2}u_2 + \cdots + d_{rm}u_m \end{aligned} \quad (2.3)$$

Expresado en notación vectorial se llega a (2.4):

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.4)$$

Siendo  $\mathbf{y}$  el vector de salida de dimensión  $r$ , donde:

$\mathbf{C}$  = La matriz de salida de dimensión  $r \times n$

$\mathbf{D}$  = La matriz de transmisión directa de dimensión  $r \times m$

## 2.3. Control por planos deslizantes en tiempo continuo

La técnica de control planos deslizantes es una metodología inventada en la antigua unión soviética y basada en gran medida en el concepto de estabilidad de Lyapunov, hecho por el cual es ampliamente usada gracias a que garantiza la estabilidad de los sistemas físicos. La estabilidad de los sistemas de control es uno de los puntos más importantes para lograr un control adecuado. Esta técnica hace que se genere un plano por el cual se deslizarán las variables de estado del sistema, haciendo que se mitiguen las condiciones iniciales (generando estabilidad según el criterio de Lyapunov) y llevando el sistema hasta el punto deseado.

La técnica de control por modos deslizantes hace parte fundamental en la teoría de los sistemas no lineales, y fue una metodología propuesta en la antigua unión soviética por S.V. Emelyanov del *Institute of Control Sciences*, esta teoría de control no lineal es ideal para usarse en sistemas multivariables o de estructura desconocida, en sistemas donde no se conoce ciertamente los parámetros exactos de la planta, y es necesario plantear una representación simplificada del sistema.

El control por modos deslizantes puede ser separado en dos partes: La primera parte es el modo de alcance, en el cual la trayectoria inicia desde cualquier punto sobre el plano de fase moviéndose hacia la superficie de conmutación  $S$  la cual alcanza en un tiempo finito. La segunda parte es el modo deslizante, en el cual la trayectoria tiende asintóticamente hacia el origen del plano deslizante  $S = 0$ .

### 2.3.1. Condición de deslizamiento

Los sistemas con modo deslizante son un tipo especial de sistemas de estructura variable, en los cuales el estado del sistema dinámico es atraído hacia una superficie en el espacio de estado conocida como superficie de deslizamiento, el cual garantiza la estabilidad del sistema de control frente a perturbaciones fuertes que se presenten.

Uno de los principales resultados obtenidos en el diseño de un controlador de estructura variable, es que la dinámica deseada para el modo deslizante puede alcanzarse con una adecuada selección o diseño de la función de conmutación. Esto asegura que, en condiciones ideales, el sistema sea robusto, es decir, insensible a las perturbaciones externas e incluso a los errores cometidos durante el proceso de modelado.

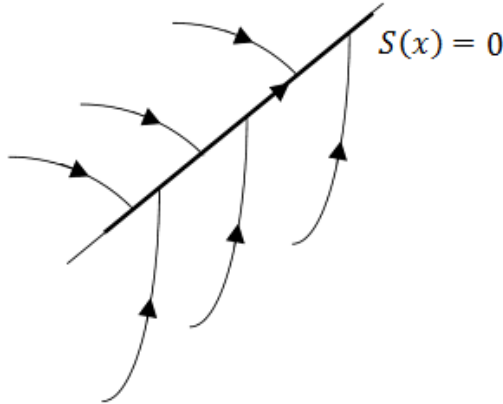
Considérese el sistema continuo como el dado en (2.5):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{2.5}$$

Donde  $x \in X \subset R^n$  es el vector de estados,  $u \in R$  es la acción de control (posiblemente discontinua),  $f : R^n \rightarrow R^n$  y  $g : R^n \rightarrow R^n$  dos campos vectoriales en  $C^n$  (infinitamente derivables) y  $h(x) : R^n \rightarrow R$  campo escalar también en  $C^n$ , todos definidos en  $X$ , con  $g(x) \neq 0, \forall x \in X$ . Estos sistemas reciben el nombre de sistemas afines en el control o sistemas lineales analíticos (y obviamente incluyen a los sistemas lineales convencionales). Si se define la función de conmutación  $s(x)$  como una función suave  $s : X \rightarrow R$ , cuyo gradiente  $\nabla S$  es no nulo en  $X$ , entonces el conjunto:

$$S = \{x \in X : s(x) = 0\}\tag{2.6}$$

Define una variedad regular en  $X$  de dimensión  $n - 1$ , llamada variedad de deslizamiento o superficie de conmutación (Ver Figura 2.2).



**Figura 2.2.** Condición de Deslizamiento

La condición satisfactoria, o condición de deslizamiento, hace que la superficie de un conjunto invariante de algunos disturbios o incertidumbres dinámicos puedan tolerarse mientras se mantiene la superficie de un conjunto invariante. Esto corresponde al hecho de que las trayectorias fuera de la superficie pueden moverse hacia la superficie  $S(t)$ , se conoce como una superficie de deslizamiento, y el comportamiento del sistema una vez en la superficie se denomina régimen de deslizamiento o en modo de deslizamiento.

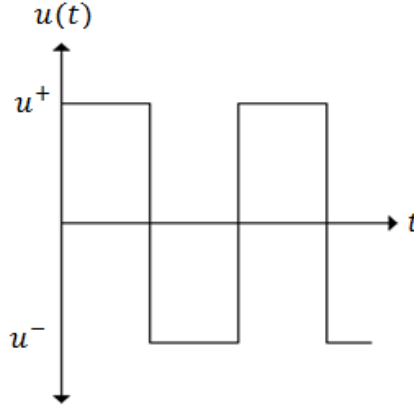
Para que exista un modo deslizante en una superficie de discontinuidad entre dos estructuras, las trayectorias a ambos lados de la superficie deben dirigirse hacia la región de deslizamiento. Al representar el sistema de estructura variable con una sola entrada de control, se puede representar mediante la ecuación (2.7):

$$\dot{x} = f_1(x, t) + u(f_2(x, t) - f_1(x, t))\tag{2.7}$$

Donde  $f_1(x, t)$  y  $f_2(x, t)$  son campos vectoriales. La señal de control  $u$  es discontinua y puede tomar los valores  $u^+$  o  $u^-$  como se muestra en (2.8)

$$u(t) = \begin{cases} u = u^+ & \leftrightarrow S(x) > 0 \\ u = u^- & \leftrightarrow S(x) < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Los puntos de discontinuidad de la señal de control  $u(t)$  corresponden con los cambios de estructura del sistema.



**Figura 2.3.** Señal del Controlador en Modo Deslizante

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f_a^+ = f(x, t, u^+) & \leftrightarrow u = u^+ \\ f_a^- = f(x, t, u^-) & \leftrightarrow u = u^- \end{cases} \quad (2.9)$$

Donde  $f_a^+$  es el campo vectorial debido a la acción de control  $u^+$  cuando la dinámica del sistema se encuentra por encima de la superficie de conmutación y  $f_a^-$  es el campo vectorial debido a la acción de control  $u^-$  cuando la dinámica del sistema se encuentra por debajo de la superficie de conmutación.

## 2.4. Control por modos deslizantes en tiempo discreto

Para los sistemas de tiempo continuo no se considera el comportamiento de la muestra, sólo se consideran los valores en los casos de la muestra. Además, se supone que el muestreo se lleva a cabo por la muestra y la retención, es decir, la señal permanece constante dentro del período de muestreo. Para estos sistemas a menudo se supone que la frecuencia de muestreo es lo suficientemente grande como para suponer que el sistema de circuito cerrado es de tiempo continuo (Young y Ozguner 1999). Obviamente, la diferencia más evidente entre un sistema de tiempo discreto y un sistema de tiempo continuo es la velocidad de conmutación limitado de la parte de control discontinuo. Sin embargo, no sólo la frecuencia de conmutación está limitada por un sistema de tiempo discreto. También el tiempo exacto de un cambio de entrada restringida a las instancias de muestreo es denotado por  $t = kT_s$  o simplemente por  $k$ . Por lo tanto, un modo deslizante perfecto sólo es posible en el caso del conocimiento del modelo perfecto y con la ausencia de perturbaciones. En todos los demás casos, lo mejor es lograr mantener el sistema cerca de la superficie de conmutación.



La principal diferencia entre el Control por modos Deslizantes en tiempo Continuo (CSMC por sus siglas en ingles) y el Control por modos Deslizantes en tiempo Discreto (DSMC por sus siglas en ingles) es el hecho de que un DSMC se basa en un modelo de tiempo discreto del sistema. De esta manera, el controlador está limitado automáticamente a la frecuencia de muestreo por el cual se quiere que la señal de control inevitablemente sólo cambia en los casos de estudio. Ya no se supone que la señal de control pueda cambiar con una frecuencia infinita, siendo de ese modo un procedimiento de diseño más realista. El control por modos deslizantes en tiempo discreto (DSMC) apareció por primera vez en la literatura de control a mediados de los años 80 (Milosavljević 1985) para ser seguido por una creciente lista de publicaciones, (Sarpturk et al. 1987), (Aly y All 1990), (Furuta 1990), (Sira-Ramírez 1,991), (Spurgeon 1.992), (Hung et al. 1993), (Bartolini et al. 1995), (Gao et al. 1995), (Bartoszewicz 1996), (Jung y Tzou 1996), (Iordanou y Surgenor 1997), (Bartoszewicz 1,998), (Hui y Zak 1.999), y (Golo y Milosavljević 2.000).

Para realizar el método de CSMC, el procedimiento de diseño del controlador se divide en dos pasos:

- **Paso 1.** Cálculo de una superficie de deslizamiento  $[k] = S_x [k]$  que tiene dinámicas internas estables.
- **Paso 2.** El establecimiento de una ley de control que dirige el sistema de bucle cerrado hacia la superficie de deslizamiento y asegura las trayectorias del sistema para permanecer lo más cerca posible a la superficie.

El primer paso del procedimiento de diseño es exactamente el mismo que el procedimiento de diseño presentado para el CSMC. Se supone que el sistema de circuito cerrado se mantiene lo suficientemente cerca de la superficie de deslizamiento para aproximar la función de conmutación  $\sigma[k]$  por cero.

El segundo paso del procedimiento de diseño es diferente para el DSMC. Debido a la frecuencia de conmutación limitada, el sistema de circuito cerrado no puede ser accionado en un modo de deslizamiento. También la definición de una ley de alcanzabilidad no es tan sencilla como para el caso de tiempo continuo. Es necesario el campo deslizante de control de modo de tiempo discreto basado en Estado (SDSMC). Es necesario plantear varias leyes de alcance junto con las leyes de control, las cuales deben adecuadas para satisfacer las condiciones de diseño y de estabilidad necesarias para el control local del péndulo.[5]

### 2.4.1. Estado basado en tiempo discreto del control por modo deslizante

En esta sección, se tendrá en cuenta la condición del paso 2 para el procedimiento de diseño del sistema SDSMC, y tomando en consideración el paso 1, el procedimiento de diseño es similar a trabajar en tiempo continuo, con esto, el siguiente sistema controlable se considera como (2.10):

$$x[k + 1] = Ax[k] + Bu[k] + f(x, k) \quad (2.10)$$

Con  $x \in R^n, u \in R^m, f \in R^n$  delimitada de manera uniforme, y las matrices  $(A, B)$  de tamaño adecuado, la función de conmutación se define con (2.11):

$$\sigma_x[k] = Sx[k] \quad (2.11)$$

Y al definir la transformación dada en (2.12):

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_1[K] \\ \sigma_x[K] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N(S)^T \\ S \end{bmatrix}}_{T\sigma} X[T] \quad (2.12)$$

(Las columnas de  $N(S)$  abarcan el espacio nulo de  $S$  y  $S$  que ha sido elegido en el proceso de diseño del Paso 1 tal que  $SB = I_m$ ) se obtiene la siguiente representación del sistema según (2.13):

$$\begin{aligned} \bar{x}_1[k+1] &= \tilde{A}_{11}\bar{x}_1[k] + \tilde{A}_{12}\sigma_x[k] + fu(x, k) \\ \sigma_x[k+1] &= \tilde{A}_{21}\bar{x}_1[k] + \tilde{A}_{22}\sigma_x[k] + u[k] + fm(x, k) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Además, la matriz  $S$  se ha elegido de tal manera que la dinámica en el modo de deslizamiento sean estables, es decir, todos los valores propios de  $\tilde{A}_{11}$  están dentro del círculo unitario. El problema a resolver ahora es la construcción de una ley de control que acciona el sistema anterior en el modo de deslizamiento. [5]

## 2.4.2. Ley de control para discretizar el tiempo continuo

Una ley de control para un CSMC puede alcanzarse por la construcción de una función de Lyapunov. A partir de esta función de Lyapunov, una ley de alcanzabilidad se construye a partir del cual la ley de control sigue automáticamente. Por lo tanto, parece atractivo para discretizar esta ley que facilita el proceso de diseño de un DSMC. Usando una aproximación hacia delante de primera orden de la derivada del tiempo discreto de ley de alcanzabilidad que resulta ser con (2.14):

$$(\sigma_x[k+1] - \sigma_x[k]) \leq -\eta \frac{\sigma_x[k]}{\|\sigma_x[k]\|} \quad (2.14)$$

Por la sustitución de la ecuación (2.13) en la condición (2.14), resulta que la ley de control se puede construir fácilmente. Sin embargo, la ley anterior de alcanzabilidad no garantiza la convergencia hacia la superficie de deslizamiento. Es cierta parte, en cualquier momento el instante  $k$  puede generar que el sistema se vea obligado a avanzar hacia la superficie de deslizamiento. Sin embargo, con una entrada de control que conduce a la secuencia  $\sigma_x[k] = \{c(-1)^k\}$ , con un valor de  $c$  arbitraria y grande, satisface la ley de alcanzabilidad anteriormente descrita. Por lo tanto, el cumplimiento de la ley de llegar arriba la superficie no impone una condición suficiente para la convergencia. [5]

### 2.4.3. Ley de alcanzabilidad de Sarpturk

La ley de alcanzabilidad de Sarpturk que resulta ser más sencilla y está dada por (2.15):

$$|\sigma_{x,i}[k+1]| < |\sigma_{x,i}[k]| \quad (2.15)$$

Donde la notación  $\sigma_{x,i}$  representa la primera entrada del vector  $\sigma_x$ . En este caso se especifica no sólo la dirección del sistema de bucle cerrado (es decir, hacia la superficie de deslizamiento), sino también la norma de la función de conmutación que se define para ser estrictamente decreciente. Esta ley también se puede formular como (2.16):

$$\begin{aligned} [\sigma_{x,i}[k+1] - \sigma_{x,i}[k]] \operatorname{sign}(\sigma_{x,i}[k]) &< 0 \\ [\sigma_{x,i}[k+1] + \sigma_{x,i}[k]] \operatorname{sign}(\sigma_{x,i}[k]) &> 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dado que la primera condición implica que el sistema de circuito cerrado debe estar en movimiento en la dirección de la superficie de deslizamiento, en tanto que la segunda condición implica que el sistema de circuito cerrado no se le permite ir demasiado lejos en esa dirección. En otras palabras, la condición (2.16) con un valor menor que cero ( $< 0$ ), da como resultado un límite inferior para la acción y la condición con un valor mayor que cero ( $> 0$ ), da lugar a un límite superior de control. Una vez planteada esta ley, Sarpturk propone la siguiente ley de control (2.17):

$$u[k] = -K(x, \sigma_x)x[k] \quad (2.17)$$

Donde los elementos  $K_{i,j}(x, \sigma_x) \forall i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$  de la matriz de ganancias  $K(x, \sigma_x)$  son determinadas como (2.18):

$$K_{i,j}(x, \sigma_x) = \begin{cases} K_{i,j}^+ & \text{if } \sigma_{x,i}[k]x_j[k] > 0 \\ K_{i,j}^- & \text{if } \sigma_{x,i}[k]x_j[k] < 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

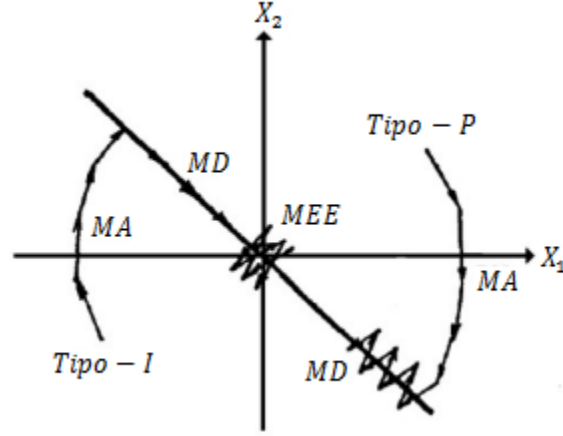
El cálculo de los coeficientes  $K_{i,j}^+$  y  $K_{i,j}^-$  no es algo fácil de obtener, ellos pueden ser determinados por las condiciones de evaluación (2.16) que resulta en una parte superior y un límite inferior para cada  $K_{i,j}^+$  y  $K_{i,j}^-$ , de hecho, hay circunstancias a tener en cuenta que estos parámetros pueden no existir en absoluto. [5]

### 2.4.4. Ley de alcanzabilidad de Gao

Según la Ley de Gao para la obtención de un DSMC, el sistema del circuito cerrado, debe presentar las siguientes propiedades:

- I. A partir de cualquier estado inicial, la trayectoria se moverá monótonamente hacia el plano de conmutación con el fin de cruzarlo en un tiempo finito.

- II. Una vez que la trayectoria ha cruzado el plano de conmutación por primera vez, se cruza el plano de nuevo en cada período de muestreo sucesivo, resultando un movimiento en zigzag sobre el plano de conmutación.
- III. El tamaño de cada paso zigzagueante sucesivo es no creciente y la trayectoria se mantiene dentro de una banda especificada. [5]



**Figura 2.4.** Trayectorias de un sistema de control de estructura variable discreto (tomado de [5])

A pesar de que las condiciones anteriores se señalaron para un único sistema de entrada, se pueden aplicar a un sistema de entrada múltiple mediante la aplicación de las tres reglas a las entradas de la función de conmutación  $\sigma_x[k]$  de forma independiente. La ley de alcanzabilidad, propuesto en por la Ley de Gao y modificado por Bartoszewicz 1996, para el caso de entrada única, se puede ampliar sin rodeos al caso de entrada múltiple como:

$$\sigma_x[k+1] = \Phi \sigma_x[k] - \begin{bmatrix} K_{s,1} \text{sign}(\sigma_{x,1}[k]) \\ K_{s,2} \text{sign}(\sigma_{x,2}[k]) \\ \vdots \\ K_{s,m} \text{sign}(\sigma_{x,m}[k]) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Y por la matriz diagonal  $\Phi \in R^{m \times m}$  con las entradas  $0 \leq \Phi_{i,i} < 1 \forall i = 1 \dots m$ , y las ganancias de  $K_{s,i} \in R$  que satisfacen a  $K_{s,i} > 0 \forall i = 1 \dots m$ , y al descuidar la perturbación desconocida que puede determinar la señal de control de las ecuaciones (2.13) y (2.19) es posible obtener:

$$u[k] = (\Phi - \tilde{A}_{22}) \sigma_x[k] - \tilde{A}_{21} \bar{x}_1[k] - \begin{bmatrix} K_{s,1} \text{sign}(\sigma_{x,1}[k]) \\ K_{s,2} \text{sign}(\sigma_{x,2}[k]) \\ \vdots \\ K_{s,m} \text{sign}(\sigma_{x,m}[k]) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

La señal del controlador que satisface las tres propiedades del circuito cerrado para obtener un sistema de control por modos deslizantes en tiempo discreto (DSMC). [5]

## 2.5. Control adaptativo

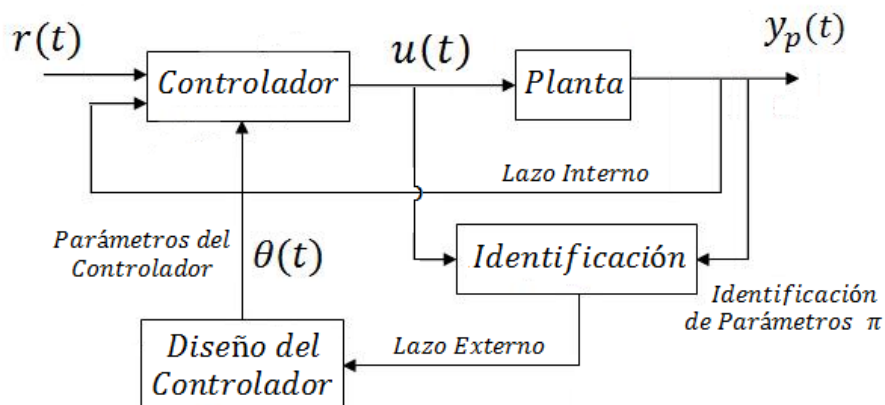
En 1950 fue iniciada la investigación en control adaptativo a causa del diseño de control de piloto automático para aviones, con dinámica variable de viento y altitud, donde el control realimentado de ganancia constante solo funcionaba en un rango de operación, surge la necesidad de un control que barriera el espectro del rango de operaciones, llegando a una técnica de esquema de ganancia por rangos.

En 1960 se presentan avances en teoría de control, como descripción de espacio de estado, teoría de la estabilidad y programación dinámica. En 1970 realizan pruebas la estabilidad de los sistemas adaptativos conocidos hasta la fecha. En 1980 los investigadores avanzan en los conceptos de control robusto y la robustez del control adaptativo, comienza a emplearse para uso comercial.

Recientemente, los avances en control adaptativo tienden hacia los conceptos de aprendizaje y ciencia computacionales. Por otra parte, los progresos en microelectrónica han estimulado el desarrollo del control adaptativo, hoy en día la mayoría de los controles permiten el ajuste de parámetros de alguna manera, siendo un tema de investigación de amplio interés. El control adaptativo consiste en adaptar los procesos variables de un sistema para que su funcionamiento sea adecuado sin importar su comportamiento, y todos los parámetros de la planta los adapta.[2]

### 2.5.1. Control adaptativo directo e indirecto

Mientras el control por modelo de referencia y los reguladores de ajuste automático son introducidos en diferentes enfoques, la única diferencia real entre ellos, es que la formulación del modelo de referencia es un control adaptativo directo, mientras que los reguladores de ajuste automático son indirectos. Los reguladores de ajuste automático son los primeros en identificar los parámetros de la planta que se requieren para controlarlos de acuerdo a la estimación de las variables de estado.

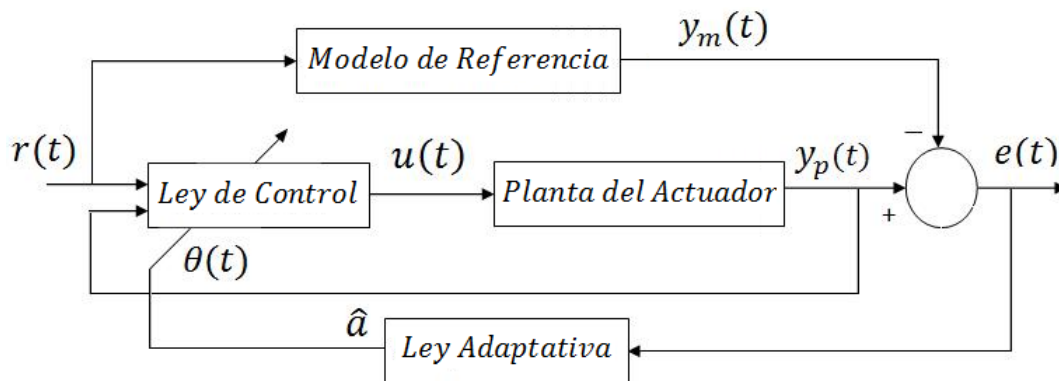


**Figura 2.5.** Controlador de Ajuste Automático

El análisis por ajuste automático para un sistema adaptativo es mucho más flexible para designar la metodología o control a utilizar, pero para sistemas lineales, y es más complejo que el análisis por modelo de referencia, el cual es ideal para sistemas no lineales y se ajusta para el control de las variables de estado, por tal motivo el método de control adaptativo por modelo de referencia es el ideal para esta investigación.[2]

### 2.5.2. Control adaptativo por modelo de referencia (MRAS)

Generalmente, un sistema de control adaptativo por modelo de referencia puede ser representado esquemáticamente en la Figura 2.6. Se compone de cuatro partes: una planta que contiene parámetros desconocidos, un modelo de referencia para especificar de forma compacta la salida deseada del sistema de control, una ley de control de realimentación que contiene parámetros ajustables, y un mecanismo de adaptación para la actualización de los parámetros ajustables. [1][2]



**Figura 2.6.** Modelo de referencia de un sistema de control adaptativo (tomado de [1])

Dónde:

- La planta se supone que tiene una estructura conocida, aunque los parámetros son desconocidos. Para las plantas no lineales, esto implica que la estructura de las ecuaciones dinámicas se conoce, pero que algunos parámetros no lo son. [1].
- Un modelo de referencia se utiliza para especificar la respuesta ideal del sistema de control adaptativo para el comando externo. Intuitivamente, proporciona la respuesta de la planta ideal que el mecanismo de adaptación debe buscar en el ajuste de los parámetros. [1].
- El controlador debe tener capacidad de seguimiento perfecto con el fin de permitir la posibilidad de convergencia de seguimiento. Cuando no se conocen los parámetros de la planta, el mecanismo de adaptación ajustará los parámetros del controlador de manera que se consigue asintóticamente seguimiento perfecto. [1].
- El principal problema en el diseño de la adaptación es sintetizar un mecanismo de adaptación que garantice que el sistema de control se mantiene estable y el error de seguimiento converge a cero cuando los parámetros son variados. Con este fin, se utiliza la teoría de Lyapunov para plantas no lineales y así obtener los resultados deseados. [1].

## 2.6. Método de Lyapunov

En 1892, Lyapunov presentó dos métodos para determinar la estabilidad de sistemas dinámicos. El primer método y el segundo método. El primer método requiere del conocimiento explícito de la forma de la solución. El segundo método solo requiere conocer la ecuación diferencial, este es muy útil para sistemas no lineales.

La estabilidad es una de las características más importantes de los sistemas dinámicos. Al analizar la estabilidad de dichos sistemas, surgen diferentes problemas según la manera en que se la caracterice y los sistemas en consideración. Por ejemplo, los sistemas lineales y estacionarios, existen métodos para poder determinar su estabilidad, como el criterio de la respuesta al impulso, el criterio de Routh y el de Nyquist. Sin embargo cuando se tratan sistemas no lineales, estos métodos no tienen validez.

La gran importancia dinámica de los sistemas no lineales se presenta en ciertos fenómenos que no se evidencian al estudiar los sistemas lineales. Uno de estos fenómenos es la existencia de múltiples puntos de equilibrio aislados. Un sistema lineal puede tener un solo punto de equilibrio aislado, y por lo tanto un solo estado de régimen estacionario que si el punto es estable atrae al estado del sistema independientemente del estado inicial. En cambio, los sistemas no lineales pueden tener varios puntos de equilibrio, y la convergencia a uno estable depende del estado inicial. Debido a esto, resulta importante recordar el concepto de estabilidad de los diferentes puntos de equilibrio de los sistemas no lineales para poder entender mejor el comportamiento del mismo.

Se requiere analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas no lineales mediante el estudio del comportamiento del estado en un entorno de los mismos. Para ello se presenta el concepto de estabilidad de Lyapunov. Como la función de Lyapunov es similar a una función de energía, esta debe decrecer en el tiempo. Utilizando este método en el diseño de sistemas adaptativos, se trasladan las especificaciones de estabilidad directamente en la ley de adaptación.

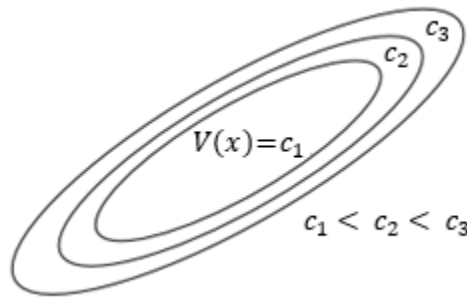
Un punto de equilibrio de un sistema dinámico es estable en el sentido de Lyapunov, si todas las soluciones que nacen en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en dichas cercanías; de otra forma resulta inestable. El punto de equilibrio además es asintóticamente estable si las soluciones además de permanecer en las cercanías del mismo, tienden hacia el punto de equilibrio a medida que transcurre el tiempo.

De otro lado, la teoría clásica de la Mecánica dice que un sistema es estable si su energía, una función positiva, es continuamente decreciente, o sea tiene derivada negativa, hasta que el sistema alcanza su estado de equilibrio. El segundo método de Lyapunov es una generalización de este hecho. Lyapunov demostró que ciertas otras funciones aparte de la función energía pueden ser usadas para la determinación de la estabilidad del punto de equilibrio de un sistema.

El teorema principal de Lyapunov dice lo siguiente:

- Sea el sistema dinámico  $\dot{x} = f(x, t)$ , donde  $f(0, t) = 0$  para todo  $t$ .

- Si existe una función escalar  $V(x, t)$  con primeras derivadas parciales y que satisface las condiciones:
  - $V(x, t)$  es definida positiva.
  - $\dot{V}(x, t)$  es definida negativa.
  - Entonces el estado de equilibrio en 0 es asintóticamente estable.
  - Si además  $V(x, t) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , el estado de equilibrio es global y asintóticamente estable.



**Figura 2.7.** Curvas de nivel de una función de Lyapunov

Usando superficies de Lyapunov, la Figura 2.7 da una interpretación intuitiva del Teorema. La condición  $\dot{V} \leq 0$  implica que cuando la trayectoria cruza la superficie de Lyapunov  $V(x) = c$ , se introduce en el conjunto  $\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \leq c\}$ , y nunca puede salir de él. Cuando  $\dot{V} < 0$ , la trayectoria se mueve de una superficie de Lyapunov a otra superficie de Lyapunov interior con un  $c$  menor. A medida que  $c$  decrece, la superficie de Lyapunov  $V(x) = c$  se achica hasta transformarse en el origen, mostrando que la trayectoria tiende al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si sólo se sabe que  $\dot{V} \leq 0$ , no es posible asegurar que la trayectoria tienda al origen, pero se puede concluir que el origen es estable es estable porque la trayectoria puede ser encerrada en cualquier trayectoria sólo con requerir que el estado inicial  $x(0)$  pertenezca a una superficie de Lyapunov contenida en dicha trayectoria.[1]





# Capítulo 3

## 3. Implementación, diseño y simulación del sistema de control del péndulo invertido con rueda de reacción

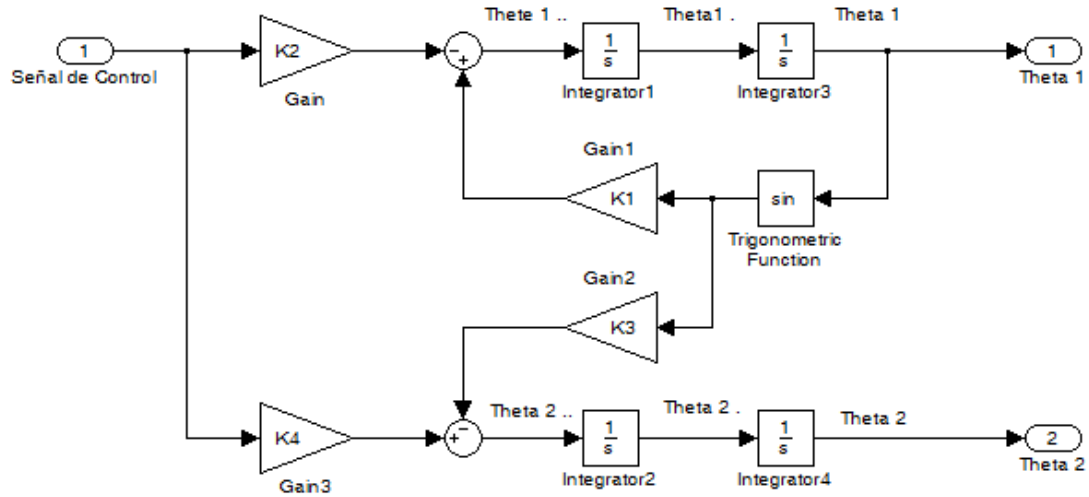
### 3.1. Diseño del sistema RWPI

En la implementación del sistema RWPI, la cual fue desarrollado en el Capítulo 1 por el modelo matemático, donde está representado por (3.1) y (3.2), las cuales están conformadas por un conjunto de ecuaciones deferenciales no lineales, que para este caso, representa el sistema del péndulo implementado en Simulink de MATLAB, como se observa en el Figura 3.1.

$$\ddot{\theta}_1 = K_1 \sin \theta_1 - K_2 u \quad (3.1)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -K_3 \sin \theta_1 + K_4 u \quad (3.2)$$

La expresión sinusoidal presentada en las ecuaciones del modelo del péndulo invertido, indican un comportamiento *no lineal* en el sistema, siendo importante para el estudio del diseño del controlador.



**Figura 3.1.** Sistema no lineal del Modelo del Péndulo Invertido con Rueda de Reacción

Para la Figura 3.1, las salidas del sistema  $\theta_1$  y  $\theta_2$  representan los ángulos del péndulo y de la rueda de reacción, y la entrada  $u$  es la señal de control que es aplicada al sistema RWPI, que se encuentra descrita en el bloque de Simulink denominado Péndulo Invertido de Rueda de Reacción en el sistema de control de la Figura 3.6.

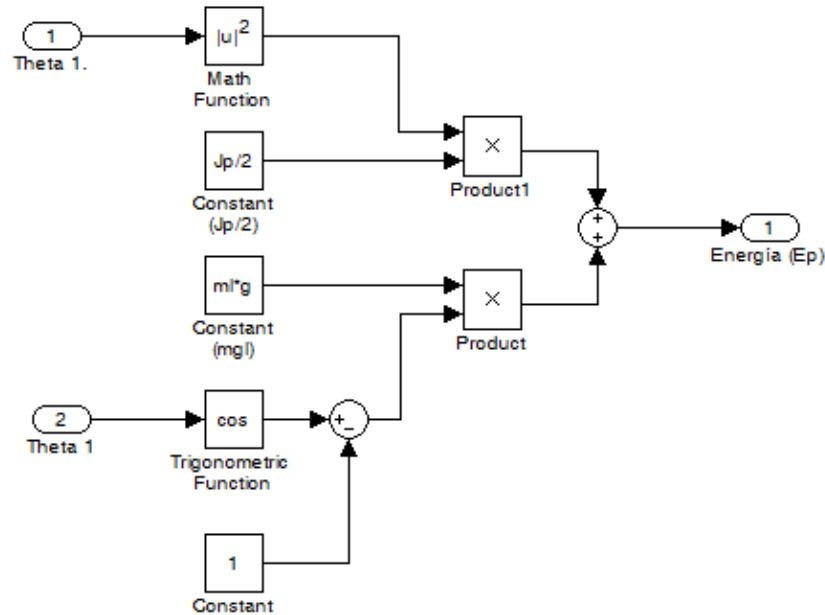
### 3.2. Regulación de la energía del sistema

En esta sección, se implementará el levantamiento por medio del balanceo del péndulo, en la manipulación de la energía del sistema en lugar de la posición y velocidad aplicada directamente, con esto se genera una señal de control por regulación de energía que es aplicada al sistema para obtener el balanceo y llevarla a la posición de control deseada.

Para el levantamiento del péndulo en la posición invertida inestable en [8], se obtiene que la posición del péndulo adquiera la configuración  $\pm\pi$ ,  $(-\pi \leq \theta_1 \leq \pi)$  y la velocidad igual a cero ( $\dot{\theta}_1 = 0$ ); para obtener dicha configuración, consiste en adquirir una función de energía ( $E_P$ ) que represente todo el sistema del RWPI y que sea cero (0) en el punto de equilibrio a controlar. Para esto [11], la energía del sistema se relaciona entre el ángulo del péndulo ( $\theta_1$ ) y la energía total ( $E$ ), como se establece en la expresión (3.1):

$$E_P = \frac{1}{2}J_P\dot{\theta}_1 + gml(\cos \theta_1 - 1) \quad (3.3)$$

Siendo  $J_P = (DM/m_{22})$ , la inercia del péndulo con respecto a la posición del ángulo  $\theta_1$ . En este caso, la energía cinética de la rueda ( $E_{Kr}$ ) no se incluye en esta expresión debido a que la rueda es simétrica y suponiendo que se encuentra balanceada [8], entonces la posición y velocidad de la rueda no afecta el valor del ángulo  $\theta_1$ , aunque la velocidad presente un valor alto desconocido en el tiempo de la oscilación, en el momento en que el péndulo se encuentre en la posición invertida inestable, toma un valor finito, por lo tanto, es cuestión de que el controlador se encargue de la regular la velocidad en el momento de entrada en operación.



**Figura 3.2.** Implementación de la Energía del Sistema

En la Figura 3.2, se implementa la función de energía del sistema de la expresión (3.3) para el debido balanceo del péndulo, constituida por la posición del ángulo  $\theta_1$  y velocidad del péndulo  $\dot{\theta}_1$  (barra).

Al calcular la derivada temporal de la energía del péndulo de la expresión (3.3) y comparándola con la expresión (1.15) del modelo del péndulo en función de la aceleración ( $\ddot{\theta}_1$ ) y asumiendo  $m_{22} = m_{21}$ , se obtiene la expresión:

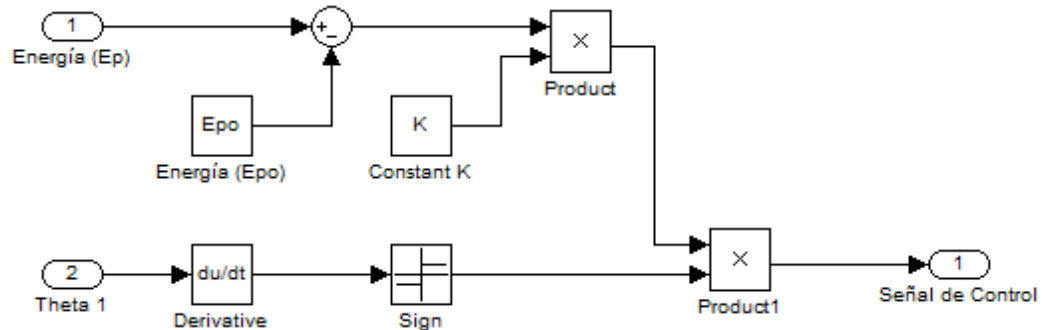
$$\begin{aligned}\dot{E}_P &= (J_P \ddot{\theta}_1 - gml \sin \theta_1) \dot{\theta}_1 \\ \dot{E}_P &= -\tau \dot{\theta}_1 = -u \dot{\theta}_1 K_u\end{aligned}\quad (3.4)$$

La expresión (3.4) representa los valores que toma  $\dot{E}_P$  conforme el péndulo en la expresión (1.15) se mueve por el efecto del torque ( $\tau$ ); esto significa que al asignar un valor a  $\tau = 0$ , se sabe que  $\dot{E}_P = 0$ , entonces conforme el tiempo crece, el péndulo solo se debe mover en la configuración  $\pm\pi$ , ( $-\pi \leq \theta_1 \leq \pi$ ) y  $\dot{\theta}_1 = 0$  y el comportamiento de la energía  $E_P$  permanece constante [8].

De acuerdo a lo anterior, para lograr que el péndulo se encuentre en la posición deseada, se necesita conseguir que la energía obtenga un valor  $E_{P0} = -2gml$  evaluado en los puntos  $\dot{\theta}_1 = 0$  y  $\theta_1 = \pm\pi$ , donde alcanza el punto de equilibrio para el control de estabilidad por modos deslizantes. Es por esto que se define una posible señal de control empleando la definición de estabilidad de la *Función de Lyapunov* en [1], que permite regular la energía del sistema a condiciones deseadas, es por esto que obtenemos la señal de control que produce el balanceo del péndulo:

$$u = K(E_P - E_{P0}) \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_1) \quad (3.5)$$

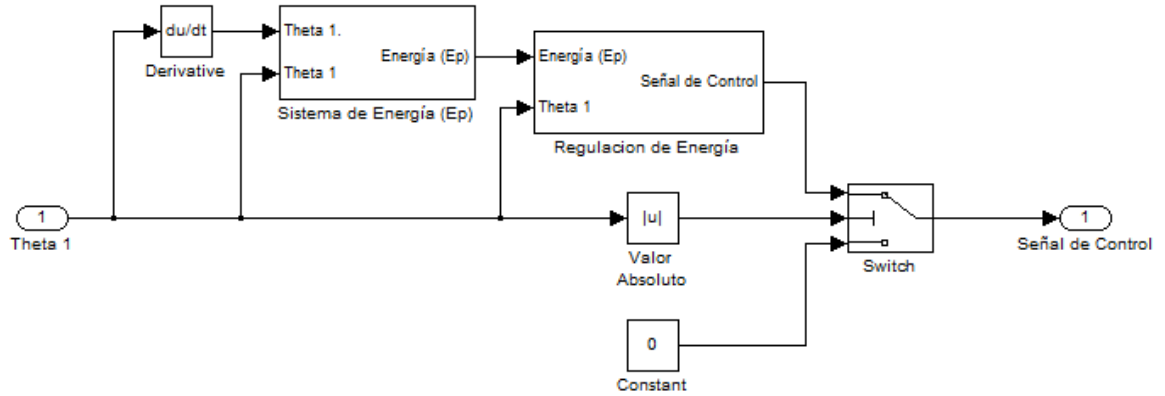
Donde la constante  $K$  es una ganancia que permite manipular la amplitud de la señal regulada y la rapidez con el péndulo alcanza la posición invertida, definida por  $K = K_d/K_u$ , siendo  $K_d$  una constante positiva arbitraria y  $K_u$  definida en la expresión (1.23). El término  $\operatorname{sign}(x)$  permite direccionar la señal de control para aumentar y reforzar el balanceo del péndulo en el transcurso del tiempo. Considerando para esta función el sistema se encuentre en la posición inicialmente vertical inferior [8][9][10][11].



**Figura 3.3.** Regulación de Energía

Los diagramas que se desarrollaron anteriormente relacionando la Regulación de Energía y la implementación de la Energía del Sistema, es el desarrollo del control para obtener el

balanceo del péndulo, correspondiente a la implementación en SIMULINK de MATLAB R2010a como Swing-up por Regulación de Energía (Ver Figura 3.4).



**Figura 3.4.** Swing-up por Regulación de Energía

Esta implementación representada en la Figura 3.4, adquiere el valor de  $\theta_1$  para generar la señal de control y los cálculos de la energía del sistema, también toma el valor absoluto de  $\theta_1$  para ser comparado en el Switch, dando como resultado la señal de control por regulación. Esta señal de control es generada siempre que el valor de  $\theta_1$  permanezca entre  $\pm 70^\circ$ ,  $(-70^\circ \leq \theta_1 \leq 70^\circ)$  para este diseño, siendo lo contrario, el Switch conmutará y se obtendrá un valor nulo (0).

### 3.3. Diseño del control por realimentación de variables de estado

El diseño por realimentación de variables, genera una mayor estabilidad en los sistemas inestables, en la mejora de robustez ante las variaciones del comportamiento de los sistemas y/o disminuir perturbaciones externas. Un sistema realimentado consta de un proceso dado con unas propiedades fijas y de un controlador que puede elegirse libremente. Este método se emplea con la representación de un sistema dinámico y con el conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden (con el modelo de las variables de estado).

Para este diseño, se tiene como consideración un modelo referencia de las ecuaciones de estado para un sistema controlable, expresando en (3.6):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (3.6)$$

Una vez con el modelo de referencia y la representación del péndulo ya descritas en las expresiones (3.1) y (3.2), se definen las variables de estado que poseen la información necesaria para el desarrollo adecuado en la implementación del control por realimentación, en la expresión (3.7):

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta_1 & \rightarrow & \dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 \\ x_2 &= \dot{\theta}_1 & \rightarrow & \dot{x}_2 = \ddot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$x_3 = \dot{\theta}_2 \quad \rightarrow \quad \dot{x}_3 = \ddot{\theta}_2$$

Representado la expresión (3.7) en el sistema y linealizando la función del péndulo invertido considerando los términos de primer orden y evaluando las derivadas en el punto de operación, se obtiene:

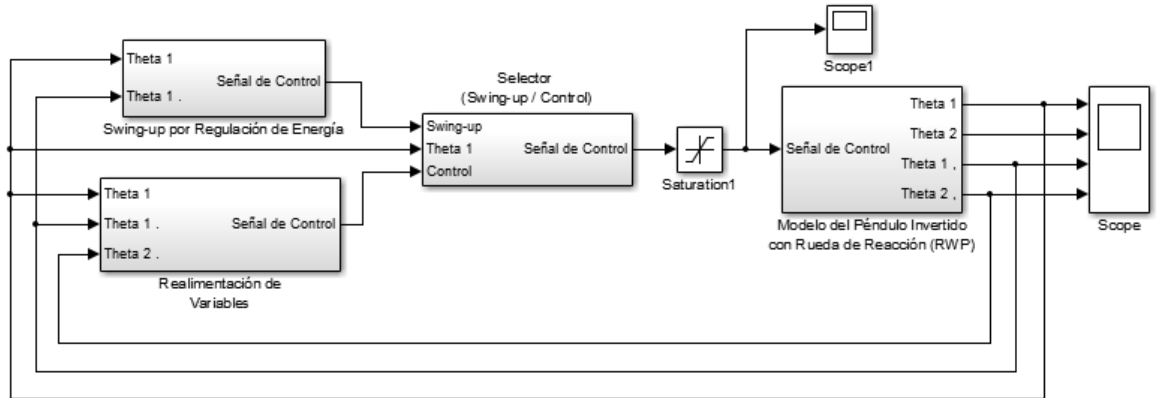
$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_1 &= \Delta x_2 \\ \Delta \dot{x}_2 &= K_1 \cos(x_{10}) \Delta x_1 - K_2 \Delta u \\ \Delta \dot{x}_3 &= -K_3 \cos(x_{10}) \Delta x_1 + K_4 \Delta u \end{aligned} \quad (3.8)$$

Con el conjunto de ecuaciones de la expresión(3.8), evaluado en el punto de operación, se reescribe en forma matricial, quedando de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \\ \Delta \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ K_1 & 0 & 0 \\ -K_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -K_2 \\ K_4 \end{bmatrix} \Delta u \quad (3.9)$$

$$\Delta y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Donde se puede identificar las matrices  $A, B$  y  $C$  mostradas en la expresión (3.6) y  $D$  con un valor igual a cero ( $\bar{D} = 0$ ), he implementada en el bloque de SIMULINK de Matlab como *Realimentación de Variable*, mostrada en la Figura 3.5.



**Figura 3.5.** Implementación del Control Local por Realimentación de Variable en el Sistema RWPI

### 3.4. Diseño del control por planos deslizantes para el sistema RWPI

Las propiedades interesantes de los sistemas constituidos por estructuras variables en la que se puede generar una posible existencia del Control por Planos Deslizantes en las superficies discontinuas de las estructuras, genera una superficie de deslizamiento  $S = 0$ , siendo el camino más deseado por el modelo de espacio de estado, diseñado para este

trabajo. Este análisis, se basa en la trayectoria del sistema en el plano la cual está constituida por dos fases que representan los dos modos del sistema: el modo deslizamiento y el modo de alcance.

La primera parte llamada modo deslizante, en la que si la trayectoria de los sistemas alcanza la región donde existe un modo deslizante, el movimiento de dicha trayectoria permanecerá en la región y tenderá asintóticamente hacia el origen del plano deslizante  $S = 0$ ; para el caso en que se presenten un trayectoria que salga de la región (región del modo deslizante) o inicie desde cualquier punto del espacio del plano, se genera la segunda representación del sistema llamada “*modo de alcance*”, la cual produce que las variables de espacio de estado, sean atraídas a la trayectoria de origen deslizante  $S = 0$ . [7].

El sistema debe ser representado en un modelo de espacio de estados de orden  $n$ , que se muestra en (3.10):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + u(t) + d(t)\end{aligned}\tag{3.10}$$

Dado que es  $X = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$  y  $u$  son el vector de estado  $n$  dimensional y la entrada de control del sistema respectivamente, y  $d(t)$  representa la perturbación externa del sistema. Esta perturbación se asume con un valor acotada de la forma (3.11):

$$|d(t)| \leq D\tag{3.11}$$

Donde  $D$  es un valor escalar. Si los valores del estado deseado  $X_d$  se consideran como una función escalón, las ecuaciones dinámicas de (3.10), se pueden reescribir en términos del error, definiéndose como (3.12):

$$\mathbf{e} = [x_{d1} - x_1 \ x_{d2} - x_2 \ \cdots \ x_{dn} - x_n]^T\tag{3.12}$$

Entonces si tomamos como  $x_{d2} = x_{d3} = \cdots = x_{dn}$ , el error es dado por (3.13):

$$\mathbf{e} = [x_{d1} - x_1 \ -x_2 \ \cdots \ -x_n]^T\tag{3.13}$$

Considerando sus derivadas, se toman como variables de estado según (3.14):

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_3 \\ &\vdots \\ \dot{e}_{n-1} &= e_n \\ \dot{e}_n &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n + u(t) + d(t)\end{aligned}\tag{3.14}$$

Parta la definición de la superficie de deslizamiento, en la mayoría y para este caso, se toma como (3.15):

$$S(\mathbf{e}) = \mathbf{c}^T \mathbf{e} \quad (3.15)$$

Donde  $\mathbf{C} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]^T$ ,  $\mathbf{c} \in R^n$  y con  $\mathbf{e}$  como el vector de error, el vector  $\mathbf{c}$  se define a partir de la ecuación  $S(\mathbf{e}) = \mathbf{c}^T \mathbf{e} = 0$ , con lo cual se garantiza que el sistema resultante sea estable, y tomando la definición, se tiene la expresión (3.16):

$$S(e) = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_{n-1} e_{n-1} + c_n e_n = 0 \quad (3.16)$$

Tomando como  $c_n = 1$ ; y derivando la anterior expresión con respecto al tiempo ( $t$ ), se tiene (3.17):

$$\dot{S}(e) = c_1 \dot{e}_1 + c_2 \dot{e}_2 + \dots + c_{n-1} \dot{e}_{n-1} + c_n \dot{e}_n = 0 \quad (3.17)$$

Luego se toman las expresiones (3.14) y reemplazando en la (3.17) se obtiene (3.18):

$$\dot{S}(e) = a_1 e_1 + (a_2 + c_1) e_2 + \dots + (a_n + c_{n-1}) e_n - u_{eq} - d(t) \quad (3.18)$$

Y despejando  $u_{eq}$  de la expresión, se obtiene La ley de control equivalente del sistema como (3.19):

$$u_{eq} = a_1 e_1 + (a_2 + c_1) e_2 + \dots + (a_n + c_{n-1}) e_n - d(t) \quad (3.19)$$

Esta Ley de control mantiene el sistema sobre el plano deslizante  $S = 0$ . Y para obtener que el sistema permanezca sobre el plano, es necesario plantear una ley de control que garantice que el sistema no se encuentre fuera del plano deslizante, tal que:

$$S\dot{S} < \eta|S| \quad (3.20)$$

Donde  $\eta$  es una constante positiva, y esta Ley de control es llamada la condición de alcanzabilidad [7]. El objetivo del control es garantizar que la trayectoria de estados del sistema converja a la superficie deslizante. De esta forma, se define una ley de control correctivo  $u_c$  como (3.21):

$$u_c = K \operatorname{sgn}(S) \quad (3.21)$$

Con un valor  $K$  constante positivo, y la función  $\operatorname{sgn}$  como una función discontinua definida como (3.22):



$$\text{sgn}(S) = \begin{cases} 1, & S > 0 \\ 0, & S = 0 \\ -1, & S < 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Finalmente, la ley de control total  $u$  corresponde a:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_{eq} \\ u &= a_1 e_1 + (a_2 + c_1) e_2 + \dots + (a_n + c_{n-1}) e_n - d(t) \\ &\quad + K \text{sgn}(S) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Debido a la implantación de la función  $\text{sgn}$  en la Ley de control total del sistema, se observa unas oscilaciones de alta frecuencia en la entrada del control, por la cual, a la salida del sistema se presentarán dichas oscilaciones, llamado efecto Chattering [7].

Para obtener un sistema que pueda ser modelado y ser un sistema robusto, se plantea un esquema de identificación en línea de los sistemas, que permiten obtener un modelo matemático del sistema variante con el tiempo. De esta forma, se puede diseñar un controlador dependiente del modelo del sistema lo cual hace que el sistema de control sea robusto a perturbaciones.

Una vez incorporado el esquema de identificación en línea para sistemas multivariables con una entrada y múltiples salidas, puede ser extendido a sistemas multivariables desacoplados, considerando los acoples como perturbaciones y variaciones paramétricas. Es decir, el vector de parámetros  $\theta$  se divide en  $m$  conjuntos disjuntos de datos, cada uno asociado con una entrada y una salida. Por tanto, el sistema de identificación se convierte en  $m$  sistemas de identificación de sistemas SISO por [7], de la forma (3.24):

$$\hat{\theta}_i(t) = \hat{\theta}_i(t-1) + \frac{P_i(t-2)\phi_i(t-1)\phi_i(t-1)^T(t-2)}{1 + \phi_i(t-1)^T P_i(t-2)\phi_i(t-1)} * [y_i(t) - \phi_i(t-1)^T \hat{\theta}_i(t-1)] \quad (3.24)$$

Y actualizando la matriz  $P_i$ , la cual está dada por (3.25):

$$P_i(t-1) = P_i(t-2) - \frac{P_i(t-2)\phi_i(t-1)\phi_i(t-1)^T(t-2)}{1 + \phi_i(t-1)^T P_i(t-2)\phi_i(t-1)} \quad (3.25)$$

Donde  $\hat{\theta}_i$  es un vector de parámetros que corresponde a los coeficientes  $a_j$  y  $b_j$  que relacionan la salida actual del sistema  $y_i(t)$ , con las entradas  $u_i(t-j-1)$  y salidas  $y_i(t-j)$  pasadas como se muestra en la expresión (3.26), y  $\phi$  es el vector de entradas y salidas pasadas, según (3.26)

$$y_i(t) = - \sum_{j=1}^{n_1} a_j y_i(t-j) + \sum_{j=0}^{n_2} b_j u_i(t-j-1) \quad (3.26)$$

Al considerar el sistema MIMO desacoplado, se obtienen  $m$  vectores de parámetros  $\theta$  variantes con el tiempo.

Una vez obtenido la señal de control total del sistema para el control local mediante Planos Deslizantes, se define un sistema para el planeamiento de una superficie  $S$  en términos de los parámetros de  $\theta_i$  y con  $\phi(t)$  como el vector de las entradas y salidas pasadas dada por [7]:

$$y(t+1) = \Phi(\phi(t)) + \Gamma(\phi(t))u(t) \quad (3.27)$$

Donde de forma general  $\Phi(*)$  y  $\Gamma(*)$  se consideran funciones no lineales suaves,  $y(t)$  es la salida de la planta y  $u(t)$  la señal de control. Para el diseño de la ley de control, se inicializa suponiendo que los valores de  $\Phi(*)$  y  $\Gamma(*)$  son conocidas como en la expresión (3.26), para esto, se reescribiendo en la forma de predicción, como (3.28):

$$y(t+1) = -\sum_{j=1}^{n_1} a_j y(t-j+1) + \sum_{j=0}^{n_2} b_j u(t-j) \quad (3.28)$$

Luego se definen los valores de  $\Phi(*)$  y  $\Gamma(*)$  comparándolos con las expresiones (3.27) y (3.28) para obtener:

$$\begin{aligned} \Gamma(\phi(t))u(t) &= b_0 u(t) \\ \Phi(\phi(t)) &= -\sum_{j=1}^{n_1} a_j y_i(t-j+1) + \sum_{j=0}^{n_2} b_j u_i(t-j) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Una vez definido los parámetros del sistema, se considera una superficie deslizante discreta como:

$$s(t+1) = C(q^{-1})e(t+1) \quad (3.30)$$

Donde  $C(q^{-1}) = 1 + c_{n-1}q^{-1} + c_{n-2}q^{-2} + \dots + c_1q^{-n}$  es un polinomio cuyos coeficientes corresponden al vector  $\mathbf{c}$  de la expresión (3.15) y el valor del error de seguimiento  $e(t+1) = y(t+1) - r(t+1)$  junto con el valor de la señal de referencia  $r(t+1)$ . Este método de control equivalente es aplicado para cumplir con la condición de deslizamiento  $s(t+1) = 0$ .

$$\begin{aligned} s(t+1) &= C(q^{-1})y(t+1) - C(q^{-1})r(t+1) \\ s(t+1) &= C(q^{-1})\Phi(\phi(t)) - C(q^{-1})r(t+1) \\ &\quad + C(q^{-1})\Gamma(\phi(t))u_{eq}(t) \\ s(t+1) &= F(\phi(t)) + G(\phi(t))u_{eq}(t) \\ &\quad - C(q^{-1})r(t+1) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Donde

$$F(\phi(t)) = C(q^{-1})\Phi(\phi(t)) \quad (3.32)$$

$$G(\phi(t)) = C(q^{-1})\Gamma(\phi(t))$$

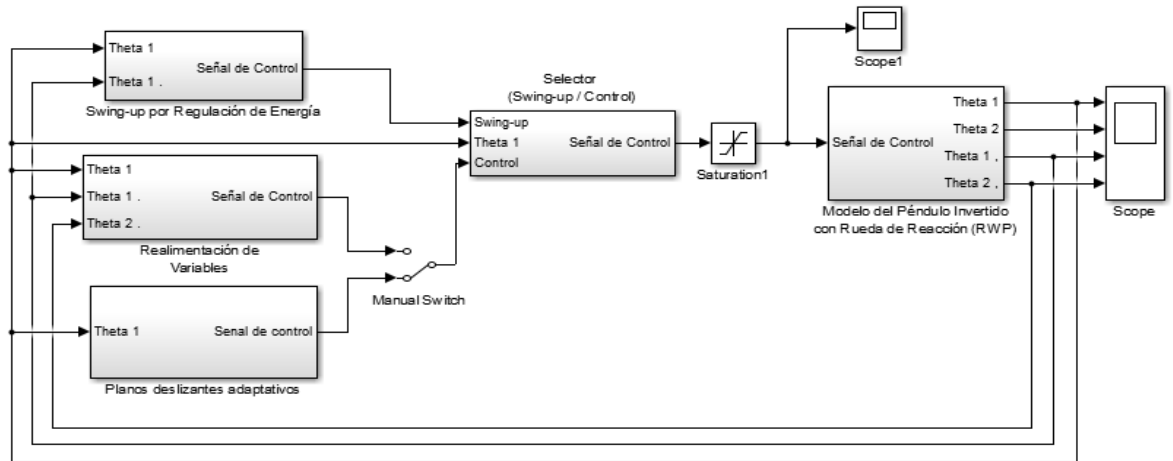
En la cual, ya con la función de deslizamiento definida de la función  $s(t + 1) = 0$ , se despeja la variable  $u_{eq}(t)$  para obtener la ley de control, tal que se llegue a (3.33):

$$u_{eq}(t) = -G(\phi(t))^{-1}(F(\phi(t)) - C(q^{-1})r(t + 1)) \quad (3.33)$$

A partir de la anterior expresión (3.33) y adicionando la expresión (3.21) del modo de alcanzabilidad, se obtiene la señal de control total para el sistema (RWPI) [7]

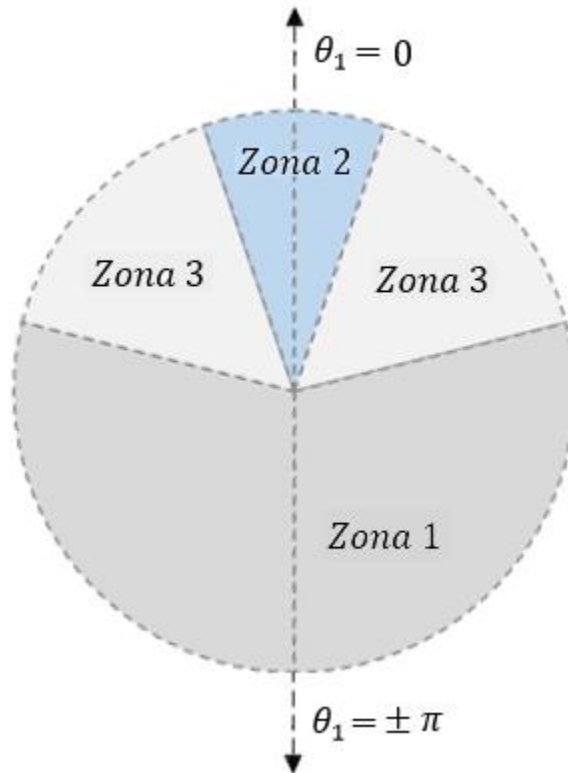
$$u_{eq}(t) = -G(\phi(t))^{-1} \left( F(\phi(t)) - C(q^{-1})r(t + 1) \right) + Ks\text{gn}(s(t)) \quad (3.34)$$

Con el sistema de control para el balanceo, la representación del sistema RWPI y la señal de Control por Modos Deslizantes Adaptativa para sistemas multivariables, la cual está definida por el diagrama de bloques de SIMULINK denominado Control Local mediante Planos Deslizantes Adaptativos, es implementando para el diseño de control del sistema del péndulo, indicado en el Figura 3.6.



**Figura 3.6.** Sistema de Control para el Péndulo Invertido con Rueda de Reacción

Con el funcionamiento de los controladores implementados en el diseño del RWPI, (Ver Figura 3.1) se presentan las zonas de actuación de los controladores del sistema, con el propósito de levantar el péndulo de la posición en reposos hasta una zona cercana al punto de equilibrio inestable ( $\theta_1 = 0$ ).



**Figura 3.7.** Zonas de actuación de los controladores sobre el sistema RWPI

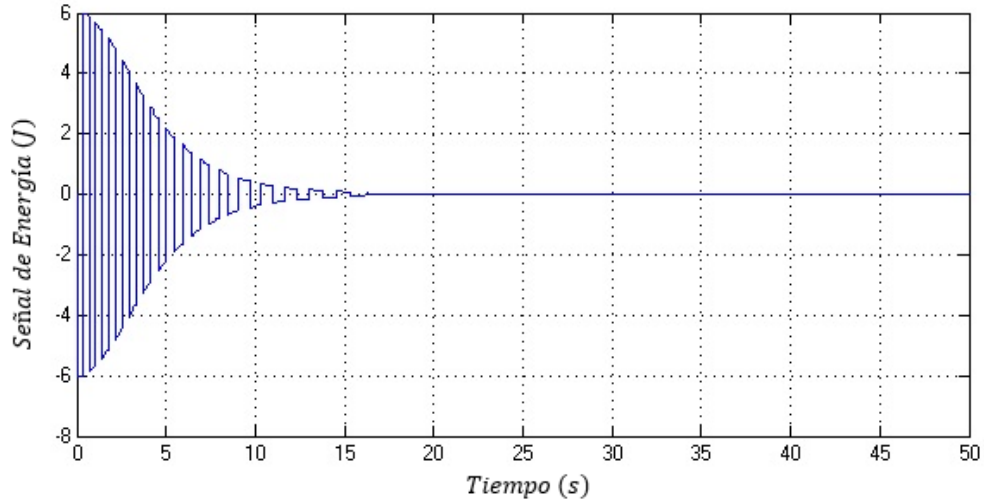
Estas zonas son definidas en el diseño, evitando que el péndulo llegue con una velocidad elevada a la posición de control deseada, sin que se presente un cambio brusco en cada control. En **La Zona 1**, es el Regulador de Energía operando alrededor de la posición en reposo (siendo posible modificar la amplitud para el tiempo de subida); **La Zona 2**, es el Control por Modos Deslizantes quien actúa alrededor del punto de equilibrio inestable; y **La Zona 3**, es representada como la zona muerta de cero operaciones ( $u = 0$ ) [11].

### 3.5. Análisis de resultados

En la implementación de cada uno de los controles locales para el sistema del Péndulo Invertido con Rueda de Reacción, se generará una serie de pruebas para observar el comportamiento del sistema bajo distintos tipos de perturbaciones en los momentos que el péndulo se encuentre en la posición de equilibrio o simplemente en la posición inicial; con el fin de mostrar el comportamiento de la planta cuando se encuentre bajo la supervisión de los controles locales, ya sea por Realimentación de Variables o por Modos Deslizantes.

#### 3.5.1. Comportamiento del sistema controlado

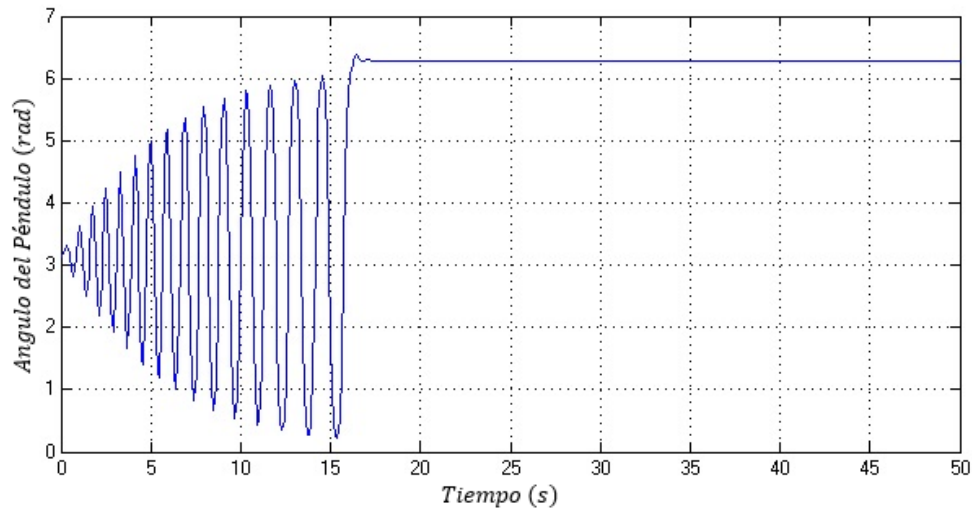
La señal de control generada por el sistema de energía y balanceo, se muestra en la Figura 3.8, con el objetivo de hacer interacción tanto con el control local mediante Planos Deslizantes Adaptativos como el de Realimentación de Variables, para lograr la respuesta adecuada en la planta.



**Figura 3.8.** Señal de control generada por el sistema de energía (Swing-up)

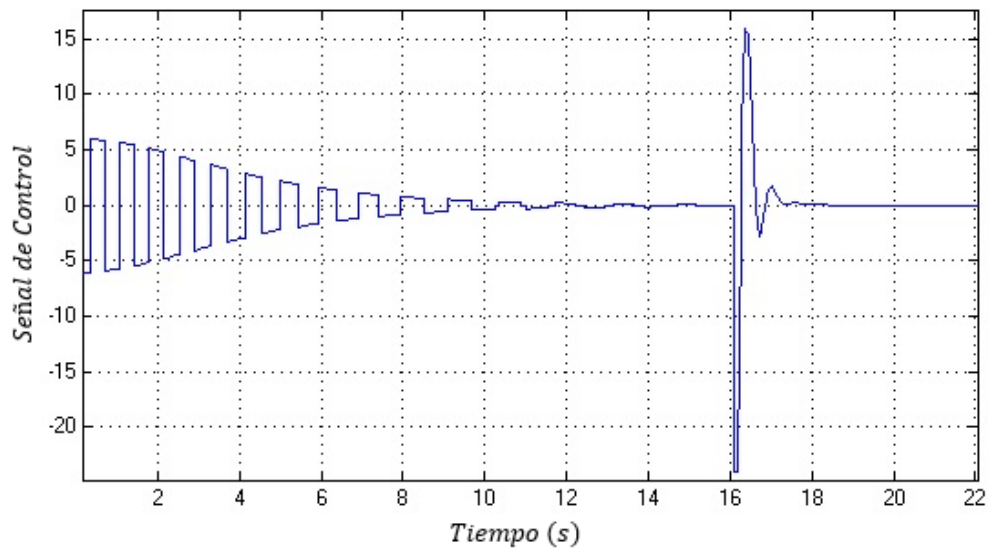
En la Figura (3.8), la señal de control mediante regulación de energía toma unos 16s aproximados en la realización del balanceo hacia el sistema, con el fin de ser llevada al punto de equilibrio, con esto la señal toma un valor nulo en el momento de ser introducido en el control local, ya sea por Planos Deslizantes o por Realimentación de Variables de Estado.

El comportamiento normal del sistema sin ser afectados por perturbaciones, para un control local por Realimentación de Variables se observa en las Figura 3.9 y 3.10.



**Figura 3.9.** Comportamiento del péndulo ante el sistema de control ( $\theta_1$ )

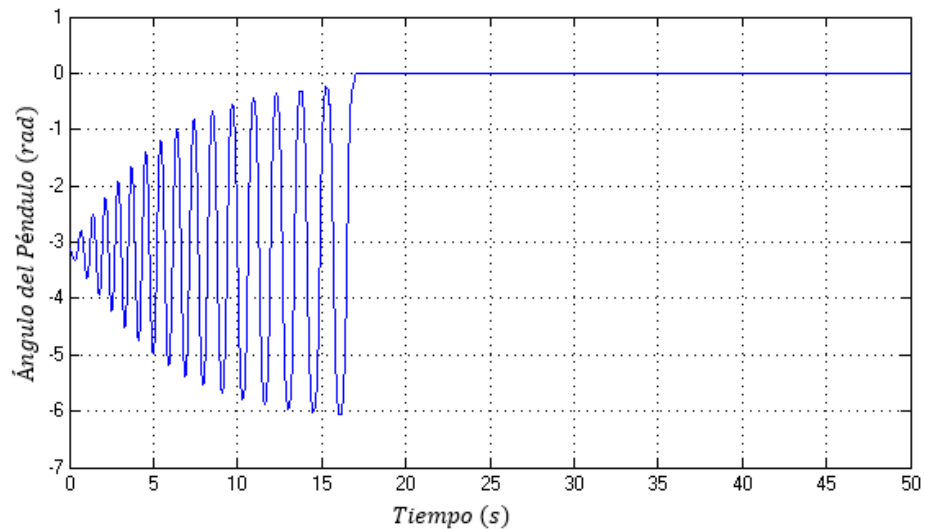
Se observa en la Figura 3.9 como el control basado en regulación de energía, genera un balanceo al sistema del péndulo para alcanzar la posición de equilibrio deseada y posteriormente introducir el control por Realimentación de Variables, para este primer análisis. El tiempo aproximado fue de 16s en estabilizar el péndulo, ya que fue diseñado para no ser aplicado a señales de control muy fuertes, lo que lograría un balance muy rápido y pasaría por el punto superior de equilibrio con demasiada fuerza generando que el control local por Realimentación no fuera capaz de sostenerlo dentro del rango designado.



**Figura 3.10.** Señal de control vista por el sistema RWPI junto con el control local aplicado

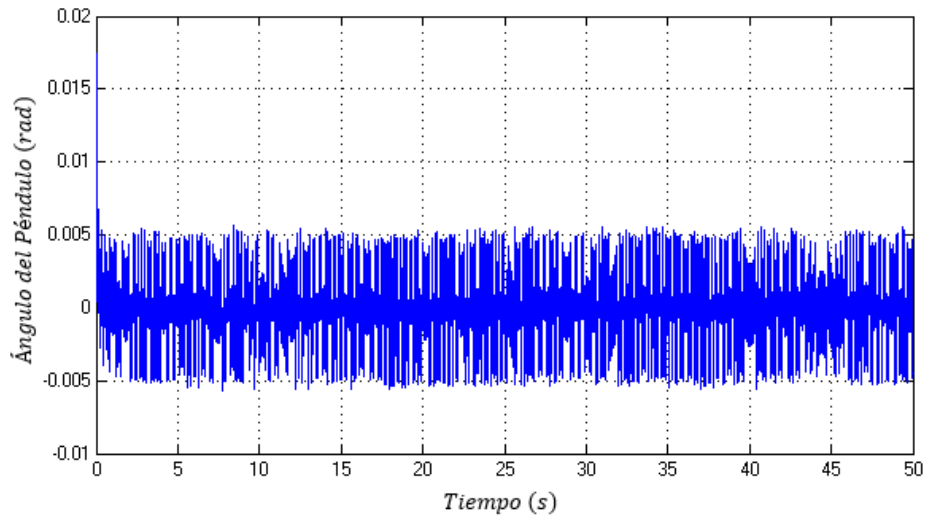
Para la Figura 3.10 se logra observar como la señal de control por regulación de energía se conecta con la señal del control local por Realimentación de Variables, dando un impulso con una amplitud grande significando el cambio de control. Logrado así estabilizar el sistema en la posición de equilibrio establecido por el diseño.

Con el fin de lograr que el péndulo con rueda de reacción se estabilice en su punto de equilibrio inestable mediante el control local por Planos Deslizantes Adaptativos el cual es el método de investigación que define este trabajo, en las figuras 3.11 y 3.12, se muestra cómo se comporta el sistema sin perturbaciones, actuando de manera normal y en las posiciones  $\pi$  y cero (0), respectivamente.



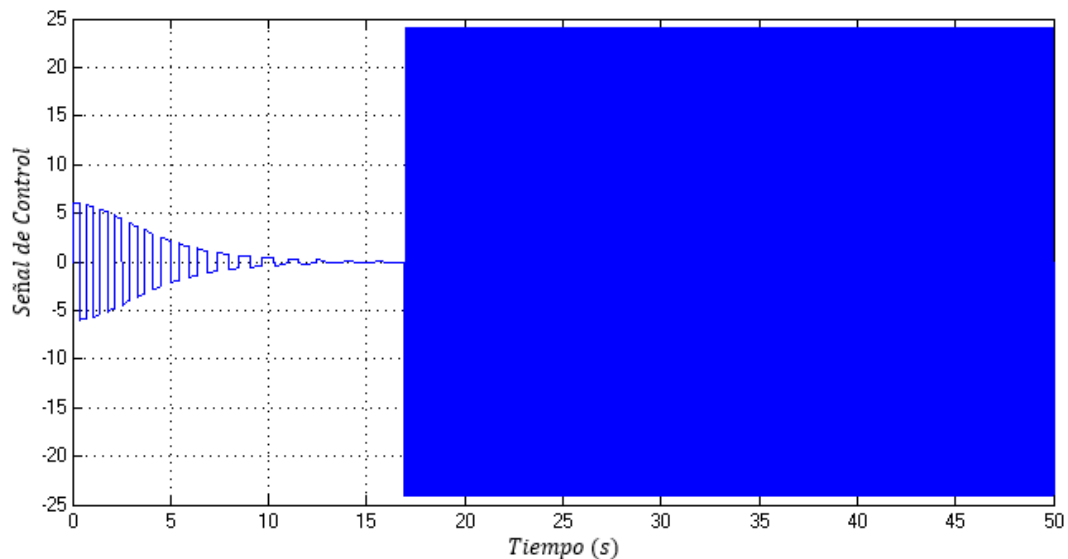
**Figura 3.11.** Comportamiento del péndulo ante el sistema de control ( $\theta_1$ ), por el control de Planos Deslizantes Adaptativo

En la Figura 3.11, se ve el comportamiento que tiene el ángulo ( $\theta_1$ ) en la posición  $\pi$ , al ser sometida por el control local mediante modos deslizantes, obteniendo así que el péndulo con rueda de reacción se estabilice luego de un tiempo de 17s y logrando un balanceo rápido y muy tenue al llegar a su posición de equilibrio cero.



**Figura 3.12.** Comportamiento del péndulo en la posición cero del sistema de control en la barra ( $\theta_1$ )

Como se ve en la Figura 3.12, el ángulo ( $\theta_1$ ) está ubicado en la posición cero para su posición inicial, haciendo que el análisis por Planos Deslizantes Adaptativos muestre una respuesta deseada estable, y muestre unas pequeñas oscilaciones debido al ruido que se presenta en el sistema de manera natural, pero logrando que el control local lo mantenga en su rango permitido de actuación  $[-0.005, 0.005]$  rad.

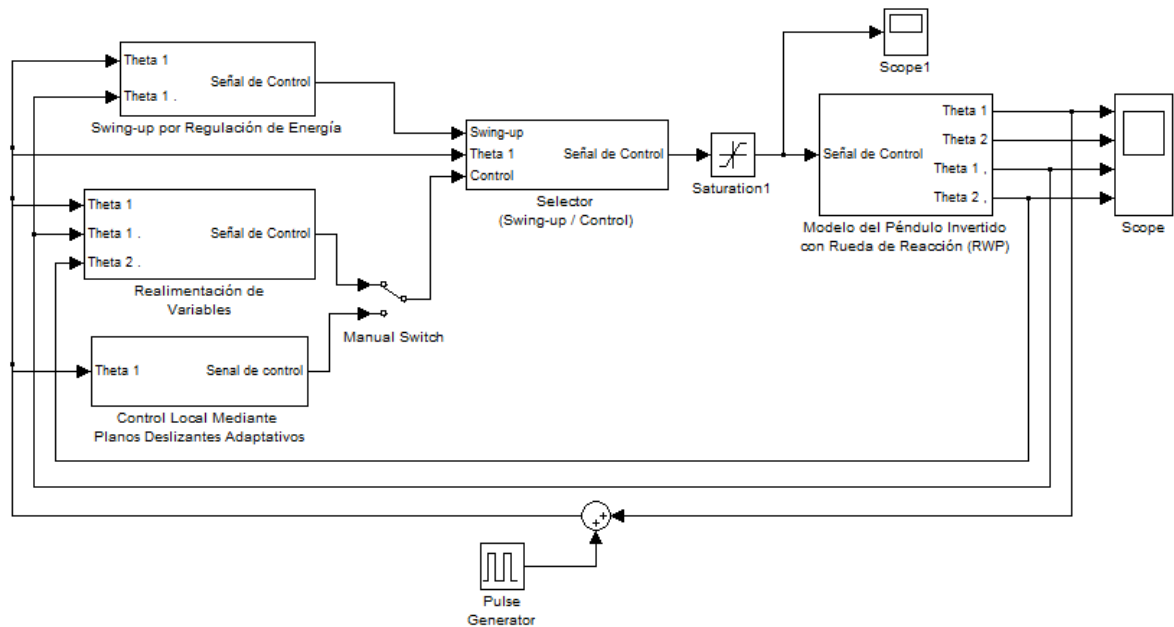


**Figura 3.13.** Comportamiento de la Señal de Control vista por el sistema RWPI en tiempo discreto del control local mediante Planos Deslizantes

En la Figura 3.13, se aprecia la respuesta de la señal de control cuando se le aplica la técnica de Planos Deslizantes Adaptativo, llegando a su valor de referencia, y se nota el comportamiento oscilante (*chattering*) de la señal debido a la ley de control correctivo  $u_c$ .

### 3.5.2. Comportamiento del sistema con perturbaciones

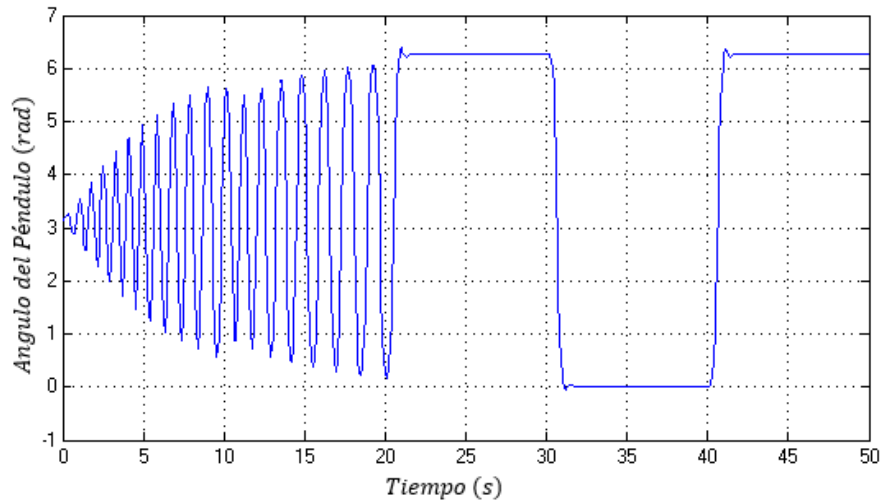
Para asegurarnos que tan sensible es el controlador ante errores que se presentan por la medición, a la señal que contiene el valor medido del ángulo  $\theta_1$  (posición angular del péndulo) se le genero un pulso (señal cuadrada) de pequeña amplitud y poca frecuencia, como se muestra en el diagrama 3.14, obteniendo que el sistema de control reciba una lectura equivocada de la posición de la barra del péndulo



**Figura 3.14.** Sistema de control por Realimentación con perturbación en sensor ( $\theta_1$ )

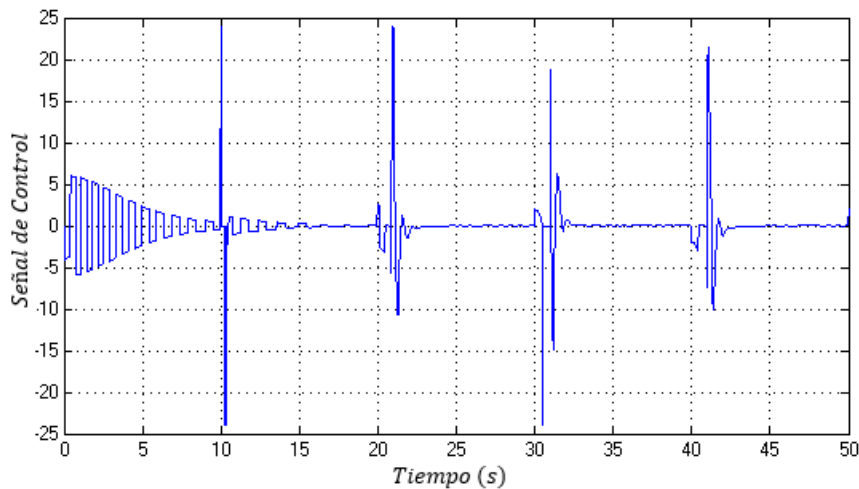
En la Figura 3.14, se observa como es alterada la posición del sistema con un generador de pulsos, afectando a la señal de control junto con la del balanceo (Swing-up) y al control local por Realimentación de Variables de Estado.





**Figura 3.15.** Operación del sistema ante una perturbación en la posición barra ( $\theta_1$ )

En la Figura 3.15, se observa que para este sistema y con la señal de perturbación, el tiempo de respuesta es mucho más largo en comparación del sistema sin alteración en la posición del mismo, debido a la afectación directa en la barra, dando como resultado una respuesta en 20s para su estabilización, y cada 10s se presenta un balanceo de cambio de giro, junto con la estabilización del sistema.

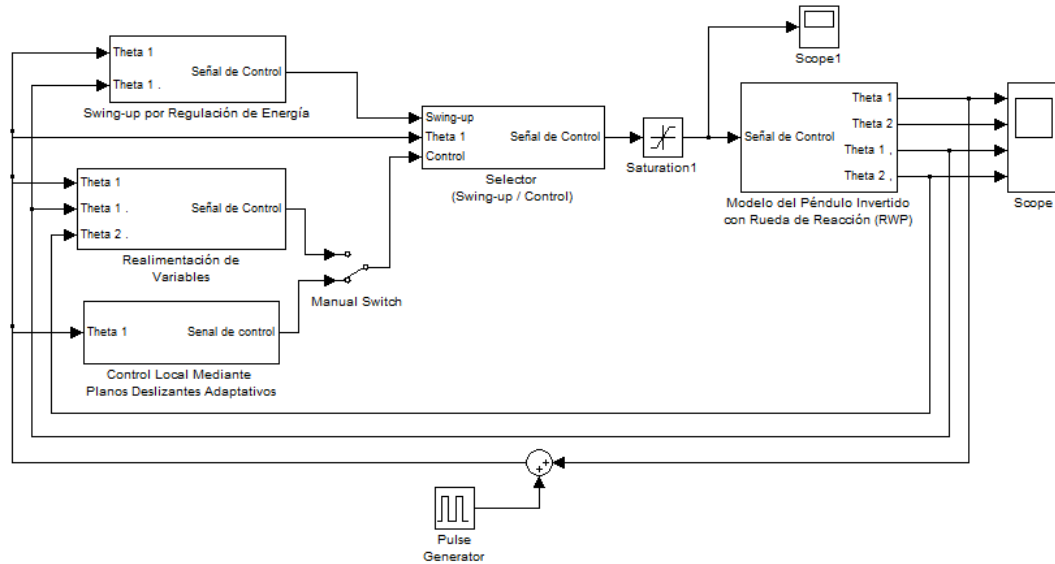


**Figura 3.16.** Señal de control con *Swing-up* y control local por Realimentación de Variable con perturbación

En la Figura 3.16, se muestra el comportamiento de las señales de control con *Swing-up* y control local respectivamente al ser afectadas por un pulso generado con una señal cuadrada en la posición de la barra, ocasionando que el sistema se vea sometido a un impulso con una amplitud grande significando el cambio de control cada 10 s hasta lograr la estabilización en su posición de equilibrio.

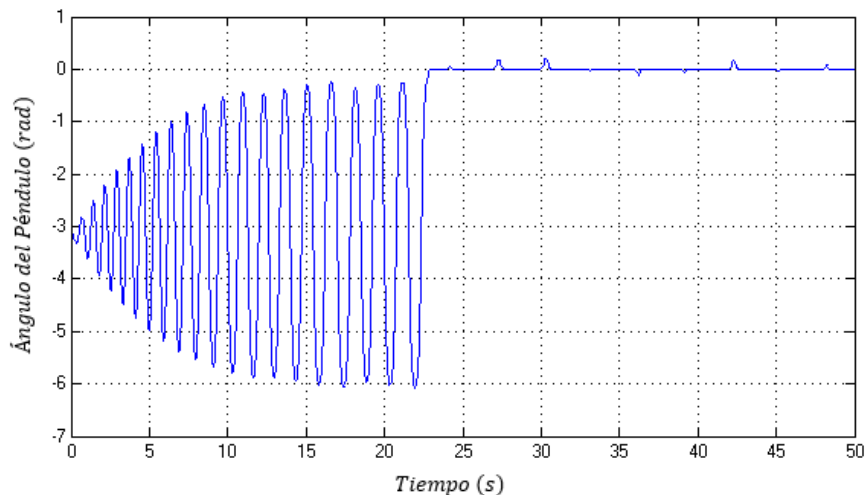
Para asegurar que tan versátil y confiable es el control local por Planos Deslizantes Adaptativos ante perturbaciones que se presentan, a la señal que contiene el valor medido del ángulo  $\theta_1$  (posición angular del péndulo) se generó un pulso (señal cuadrada) de

pequeña amplitud y poca frecuencia, como se muestra en el diagrama 3.17, garantizando que el sistema de control pueda mantenerse cerca de su zona de equilibrio.



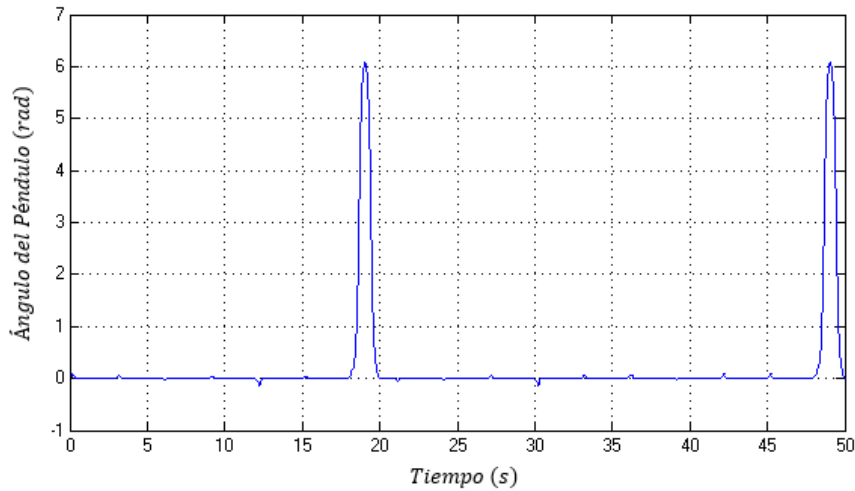
**Diagrama 3.17.** Sistema de control mediante Planos Deslizantes Adaptativo con perturbación en la barra ( $\theta_1$ )

El Péndulo con Rueda de Reacción muestra que a pesar de ser sometido a una perturbación, luego de el balanceo y la actuación del control por Modos Deslizantes Adaptativos, en un tiempo de 23s logro estabilizarse; pero debido al pulso generado se presentan alteraciones en la señal, pero sin provocar un cambio brusco o alterando en gran medida el ángulo del péndulo, y así mostrar un comportamiento adecuado en toda su región de operación, como se ve en la Figura3.18.



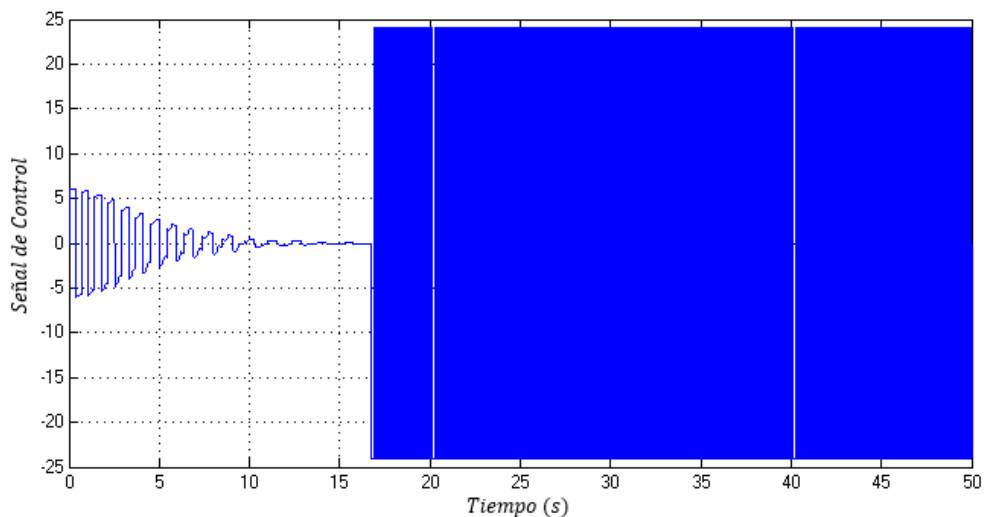
**Figura 3.18.** Operación del sistema ante una perturbación en la posición  $\pi$  de la barra del péndulo ( $\theta_1$ )

En la Figura 3.19, las perturbaciones se realizaron de igual manera, pero con el péndulo ubicado en la posición cero, pero con el fin de mostrar el mismo comportamiento en su señal.



**Figura 3.19.** Operación del sistema ante una perturbación en la posición cero (0) de la barra del péndulo ( $\theta_1$ )

Como se puede ver en la Figura 3.19, la señal que describe el comportamiento de la posición de la barra del péndulo, se ve expuesta ante una perturbación brusca a los 18s, dada por el impulso generado en el diagrama de bloques, pero de inmediato el control local logra estabilizarlo nuevamente a los 20s en su posición de equilibrio, aunque debido a esta perturbación se presentan oscilaciones en tiempos más prolongados al anterior, pero siempre volviendo a su posición de equilibrio con la ayuda del control por Planos Deslizantes Adaptativos.



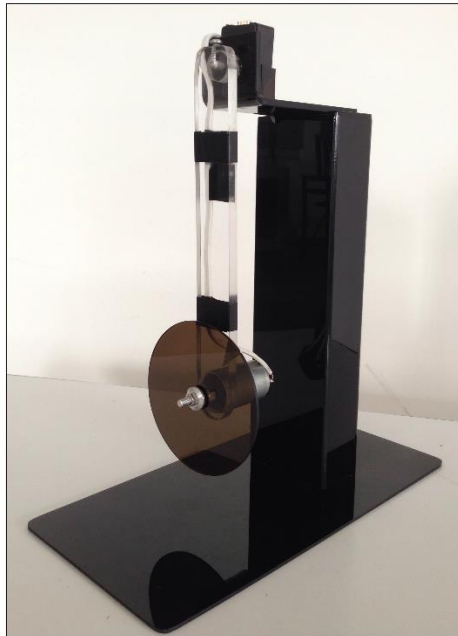
**Figura 3.20.** Comportamiento de la Señal de Control con perturbación en la barra del péndulo ( $\theta_1$ ) en tiempo discreto del control local mediante Planos Deslizantes

Las perturbaciones aplicadas a la barra del péndulo ( $\theta_1$ ). para el sistema de control local mediante Planos Deslizantes Adaptativos en tiempo discreto, presentan un comportamiento

con un ancho de banda de  $[-24,24]$  a lo largo de la trayectoria, y logrando que el péndulo permanezca dentro de su zona de deslizamiento sin importar la perturbación ocasionada.

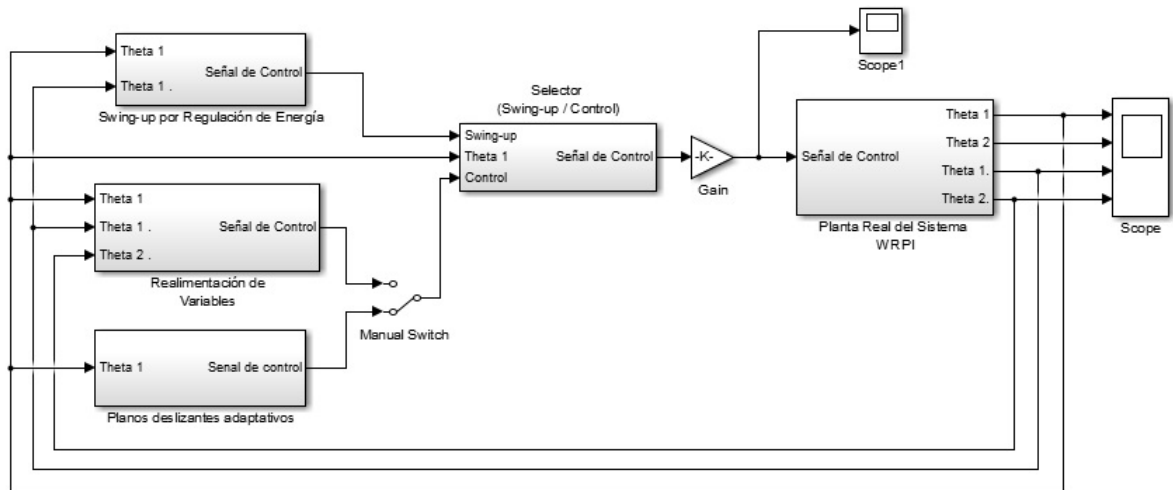
### 3.5.3.Comparación de resultados

Los planos deslizantes en tiempo discreto fueron simulados y evaluados en la sección anterior, y con una respuesta adecuada al sistema del péndulo de rueda de reacción, con el fin de obtener un buen comportamiento no solo en la simulación sino de tener una buena solución al sistema. Se realiza la implementación del péndulo, para observar su comportamiento en tiempo real, y se hace una comparación de ambos resultados para establecer que tan alejados es el uno del otro, en la Figura 3.21, se observa la planta real del sistema del Péndulo Invertido con Rueda de Reacción, para la conexión con el sistema de control que se realizó en SIMULINK de Matlab, y obtener señales adecuadas para las comparaciones del modelo real con el simulado.



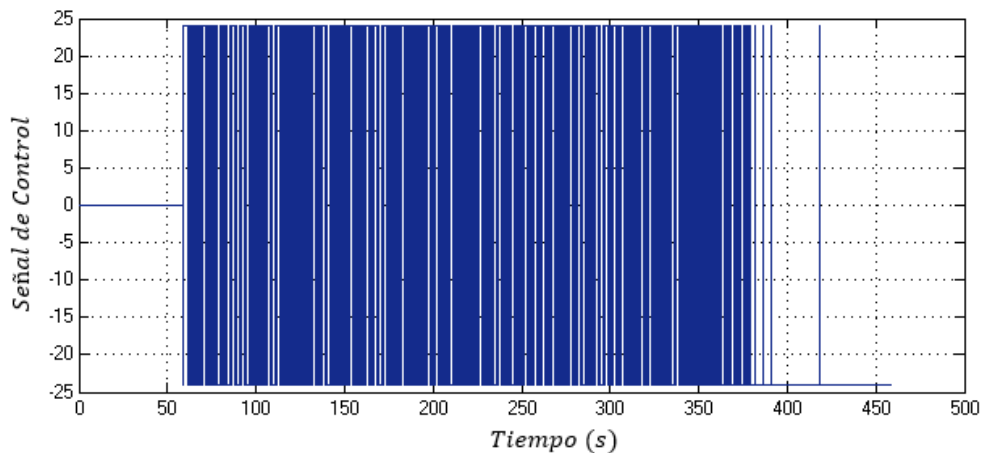
**Figura 3.21.** Péndulo invertido con rueda de reacción

En la implementación de la planta real (Ver Figura 3.21) para la conexión del sistema diseñado en SIMULINK de Matlab, es conectado mediante la tarjeta de adquisición de datos ARDUINO UNO y ARDUMOTO, en la toma de datos, y teniendo en cuenta los parámetros necesarios del diseño y la posición entregada por la planta; para dicho sistema se trabajó con un encoder en cuadratura como el sensor de la posición de la barra del péndulo ( $\theta_1$ ) y el Motor DC, para la variación de velocidad y control del sistema.



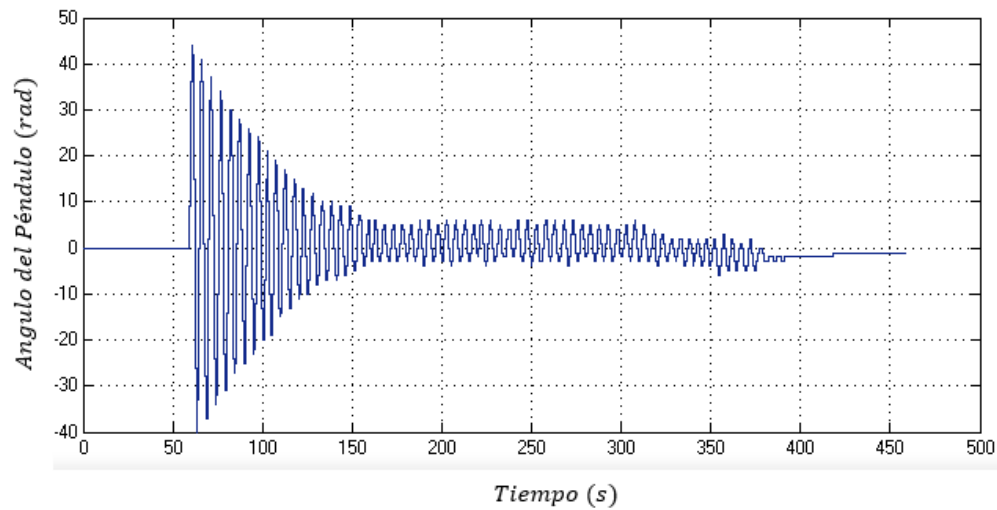
**Figura 3.22.** Sistema de Control con la implementación de la planta real RWPI

Para el sistema de control con implementación de la planta real RWPI, se busca obtener el punto de equilibrio estable aplicado por la señal de control que es introducida por el control local por Planos Deslizantes Adaptativo y por el sistema de Regulación de Energía (Swing-up), para tomar los tiempos y muestras reales del sistema, y así obtener un menor margen de error al relacionarlo con el diseño de simulación. En este proyecto, no se toma en cuenta el sistema de control local por Realimentación de Variables, ya que el sistema no hace parte del estudio realizado.



**Figura 3.23.** Señal de control generada por la planta real RWPI

En la Figura 3.23, es tomada la señal de control de la planta real, mostrando un comportamiento similar al del sistema simulado, con mayor tiempo de respuesta. Es importante recordar que es necesario proporcionar un pequeño movimiento o impulso sobre la barra del péndulo, ya sea mediante el programa o físicamente de manera que éste abandone la posición de referencia  $\pi$  descrita en la Figura 3.7. A medida que el sistema presenta oscilaciones en tiempo continuo, la señal de control que fue procesada para tener un comportamiento de trabajo en tiempo discreto, muestra una amplitud de margen entre  $[-25, 25]$ , presentando intervalos de tiempo en el cual el péndulo busca la estabilización deseada por el sistema.



**Figura 3.24.** Comportamiento del péndulo real en la posición  $\pi$

En la Figura 3.24, se ve el comportamiento que tiene el ángulo ( $\theta_1$ ) en la posición  $\pi$ , al ser sometida por el control del sistema, en la transferencia de comunicación de la tarjeta de adquisición de datos Arduino Uno con Simulink de Matlab y trabajando en tiempo real; en el sistema se obtiene un comportamiento de estabilidad en la posición de origen que es la posición de estabilidad, tomando aproximadamente 350s, siendo un tiempo muy largo, pero es necesario aclarar que este comportamiento es debido a factores que influyen directamente con la medida, como bien lo son el peso del motor con la barra y junto con la fricción que se genera en el eje principal para el giro de la barra. También se presentan algunas perturbaciones en la ejecución del proceso, ya que los sistemas de control no son generados por una única señal, presentando un mal comportamiento en el sistema en la cual el control debe tener la capacidad de mantener una buena respuesta y permitir que la planta esté en el rango de operación adecuado. Se observan los pulsos con una amplitud mayor de operación al trabajado en un rango de  $[-40,40]rad$  y en el transcurso del tiempo se disminuye para buscar el punto estable.

El sistema fue analizado y estudiado en la posición  $\pi$ , generando el balanceo correcto requerido por el diseño, y tomando el mismo comportamiento si el sistema estuviera en el punto de estabilidad en la posición cero (0) establecido en la Figura 3.7, este sistema no tuvo la suficiente señal de control obtenida por el sistema para el correcto balanceo y alcanzar la zona 2 del control por Planos Deslizantes Adaptativo. Sin embargo, el sistema es llevado manualmente en la posición del control requerido por el estudio, tomando las respuestas adecuadas, pero con mayor tiempo de estabilización, y comportándose de igual manera al sistema simulado.



## 4. Conclusiones y trabajos futuros

Se verifico a la hora de Implementar el péndulo de rueda de reacción sobre un modelo a escala, por medio de técnicas de control no lineal adaptativo, la importancia de la determinación de un momento de inercia adecuado donde el péndulo pudo mantenerse fijo en el punto de equilibrio inestable.

Se ha hecho una identificación completa del sistema, mediante la realización de distintos estudios se han obtenido las relaciones entre las distintas variables, y se han construido las funciones de transferencia y los diagramas de bloques correspondientes.

El funcionamiento conceptual de la planta se basó en un modelo de péndulo invertido y para lograr el balance del mismo se diseñó un algoritmo de control que permitiera el equilibrio y estabilidad de la plataforma. El diseño del algoritmo de control y la implementación en tiempo real de dicho algoritmo en el dispositivo, exigió desarrollar los programas respectivos en Arduino, los cuales se compilaron y se guardaron en Matlab y/o Simulink para realizar las pruebas. A través de una combinación del adecuado programa del modelo del péndulo y Arduino se obtuvieron los resultados adecuados en el funcionamiento del dispositivo en tiempo real.

La técnica de control por modos deslizantes en tiempo continuo, arrojó problemas a la hora de querer solucionar y hallar el punto de equilibrio inestable, puesto que este género valores infinitos en el plano de deslizamiento, y no era posible lograr que el sistema convergiera, siendo imposible hallar una solución la cual satisfaga y reconozca la superficie deslizante.

La técnica de control por Planos Deslizantes garantiza la estabilidad de los sistemas de control multivariables. Esta técnica hace que se genere un plano por el cual se deslizarán las variables de estado del sistema, haciendo que se mitiguen las condiciones iniciales (generando estabilidad según el criterio de Lyapunov) y llevando el sistema hasta el punto de equilibrio inestable.

Se desarrolla el control local mediante la técnica de planos deslizantes adaptativo en tiempo discreto, el cual muestra una gran ventaja si su objetivo es lograr una respuesta rápida y deseada con el uso de una frecuencia de muestreo lo suficientemente grande como para poder lograr valores finitos cerca de la superficie y plano de deslizamiento para garantizar un rango de actuación adecuado de la planta.



Se implementó la planta real arrojando los resultados esperados por la simulación, y sus datos y medidas obtenidas fueron muy similares a las obtenidas en el modelo simulado en MATLAB y Simulink, con la diferencia en la respuesta de accionamiento del controlador por motivos de fricción en los elementos, el peso, la temperatura y muchos otros factores que hacen más lenta la respuesta, pero no afectándolos en gran proporción a la hora de mostrar los datos deseados.

Es necesario examinar otras técnicas para la reducción de las oscilaciones de alta frecuencia o *chattering*, causadas por las leyes de control discontinuas, debido a que estas oscilaciones hacen que se pierda un poco de precisión en el control, y pueden producir, por ejemplo, pérdidas por calentamiento en circuitos eléctricos de potencia y gran desgaste en partes mecánicas móviles.

## 5. BIBLIOGRAFÍA

- [1]. Slotine, J. & Weiping Li; *"Applied Nonlinear Control"*. Massachusetts Institute of Technology. 1991.
- [2]. Rubio, F. & Sánchez, M; *"Control Adaptativo y Robusto"*. Universidad de Sevilla. 1996.
- [3]. Olfati-Saber, R; *"Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles"*. Massachusetts Institute of Technology. Department of Electrical Engineering and Computer. January 15, 2000.
- [4]. Castro, R.; *"Sistemas Mecánicos Sub-Actuados"*. Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica. Marzo 2001.
- [5]. Govert Monsees. *"Discrete-Time Sliding Mode Control"*. Technische Universiteit. 2002.
- [6]. Block, D.J., Astrom, K.L. and Spong, M.W; *"The Reaction Wheel Pendulum"*. Morgan and Claypool, 2007.
- [7]. Giraldo, E; *"Control por Planos Deslizantes Adaptativo en un Sistema Multivariable Desacoplado"*. Universidad Tecnológica de Pereira; Grupo de Investigación en Control Automático. Scientia et technica Año XIII, No 35, Agosto de 2007.
- [8]. Cardona, J. & Valenzuela, J; *"Control Local Utilizando Lógica Difusa del Péndulo Invertido con Rueda de Reacción"*. Universidad Tecnológica de Pereira. Proyecto de Grado. Marzo 8 de 2012.
- [9]. Hernández, V., Ortigoza, R. & Carrillo, R.; *"control Automático: Teoría de Diseño, Construcción de Prototipo, Modelado, Identificación y Pruebas Experimentales"*. Colección CIDETEC del Instituto Politécnico Nacional. México, DF, México, 2013.
- [10]. Escobar, L., Montoya, O. & Giraldo, D.; *"Control Global del Péndulo de Furuta Empleando redes Neuronales Artificiales y Realimentación de Variable de Estado"*. Artículo de Investigación. Tecno. Lógicas., ISSN 0123-7799, No. 30, pp. 71-94. Junio 2013.
- [11]. Montoya, O., Grisales, L., Correa, V. & Giraldo, D.; *"Control Global del Péndulo con Rueda de Reacción Mediante Regulación de Energía y Linealización Extendida de las Variables de Estado"*. Tecno. Lógicas., ISSN 0123-7799, Vol. 17, No. 32, pp. 33-46. Junio 2014.
- [12]. N. Khalid and A. Memon. *"Output Feedback Stabilization of an Inertia Wheel Pendulum Using Sliding Mode Control"*. IEEE, UKACC International Conference on Control (CONTROL). pp, 157-162. Jul 2014.



## 6. ANEXO

### 6.1. Código del control local por planos deslizantes adaptativo

En la implementación del control para el sistema del Péndulo Invertido con Rueda de Reacción (RWPI) en SIMULINK de MATLAB, se introduce el código de control mediante Planos Deslizantes Adaptativo, en el cual está encargado de cargar los parámetros del control en la simulación para la estabilización del sistema en el punto de equilibrio inestable deseado.

```
function u=planosdeslizantes(yk,rk,it)
global x1 yk_1 yk_2 yk_3 uk_1 uk_2 uk_3 rk_1 pk1 s

if it==0
    yk_1=0;
    yk_2=0;
    yk_3=0;
    uk_1=0;
    uk_2=0;
    uk_3=0;
    rk_1=0;
    x1=[ 1.472637414423387;
        -0.022478179593772;
        -0.450892291154415;
        -0.000000740099047;
        -0.000021523635065;
        0.000030725675479];
    pk1=0*eye(6);
    s=0;
end

c0=-0.85;
d0=0.005;

phi=[yk_1;yk_2;yk_3;uk_1;uk_2;uk_3];
teta1=x1;
yest=phi'*teta1;
c1=phi'*pk1*phi;
ye=yest(1,1);

teta=teta1+(pk1*phi*(yk-ye))/(1+c1(1,1));
pk=pk1-(pk1*phi*phi'*pk1)/(1+c1(1,1));
teta=teta(:);
x1=teta;
pk1=pk;
err=yk-ye;
```

## %PLANOS DESLIZANTES

```
s=yk-rk+c0*(yk_1-rk_1);
if (s>0)
z=1;
else
if (s<0)
z=-1;
else
z=0;
end
end

sal=teta(1)*yk+(teta(1)*c0+teta(2))*yk_1+(teta(2)*c0+teta(3))*yk_2+(teta(3)*c0)*yk_3+te
ta(5)*uk_1+(teta(5)*c0+teta(6))*uk_2+(teta(6)*c0)*uk_3;
if teta(4)==0
    teta(4)=1;
end
U=-(sal-(rk+c0*rk_1)+d0*z)/teta(4);
if U>24
    U=24;
end
if U<-24
    U=-24;
end

uk_3=uk_2;
uk_2=uk_1;
u=U;
uk_1=u;

yk_3=yk_2;
yk_2=yk_1;
yk_1=yk;

rk_1=rk;
```